

GYMNASIUM LAURENTIANUM WARENDORF



Internationale Physik Olympiade 2015

Indien

Benedikt Buller

11.06.2014

Eine detaillierte Auseinandersetzung mit den Aufgaben der 1. Runde der Physik Olympiade 2015, die vom normalen Unterricht unabhängig verfasst wurde.

Aufgabe 1

1.1 Plan und Herangehensweise	S.1
1.2 Bemerkungen zur Durchführung	S.2
1.3 grundlegende Formeln	S.2
1.4 Durchführung/Rechnung	S.2
1.4.1 Ausnutzung der Energieerhaltung	S.2
1.4.2 Berechnung der ballistischen Flugbahn	S.4
1.4.3 Anpassen der Flugkurve	S.5
1.4.4 Aufstellen der Bedingungen	S.6
1.4.5 Gleichsetzen und Lösen	S.7
1.4.6 Vertiefung und Verallgemeinerung	S.8
1.5 Antwortsatz	S.11

Aufgabe 2

2.1 Plan und Herangehensweise	S.12
2.2 Durchführung	S.12
2.2.1 Herleitung Stern-Dreiecks-Transformation	S.12
2.2.2 Rechnung	S.14
2.2.2.1 Anwendung Stern-Dreiecks-Transformation	S.14
2.2.2.2 Anwendung des Dreisatzes	S.17
2.3 Antwortsatz	S.17

Aufgabe 3

3.1 Betrachtung des Flummiexperimentes	S.18
3.1.1 Standardansatz	S.18
3.1.2 weitere Überlegungen zum quadratischen Zusammenhang	S.20
3.1.3 Vertiefende Überlegungen zum Problem	S.21
3.1.3.1 Betrachtung Luftwiderstand	S.22
3.1.3.2 Betrachtung Auftriebskraft	S.22
3.1.3.3 Betrachtung Magnus-Effekt	S.22
3.1.4 Beurteilung und Fazit des ersten Experimentes	S.25

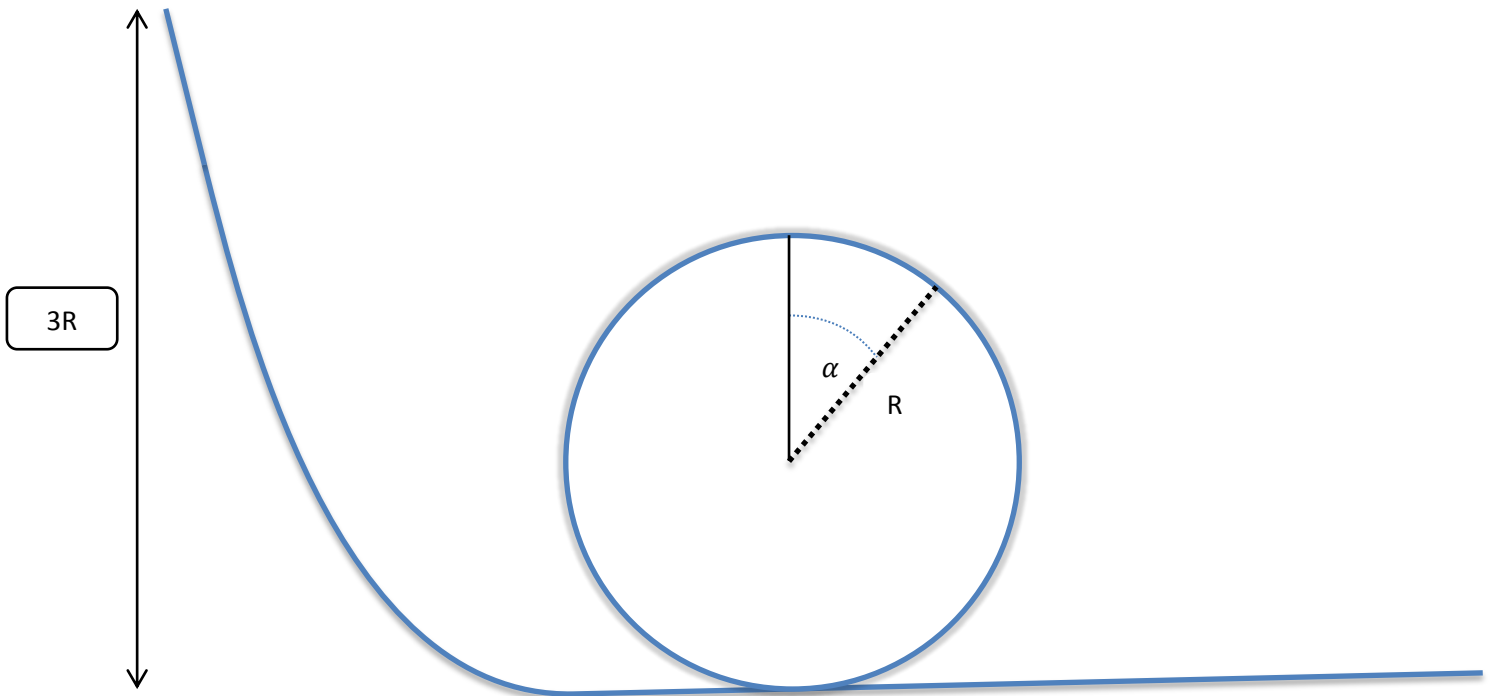
Aufgabe 3

3.2 Betrachtung des Kondensatorexperimentes	S.26
3.2.1 Standardansatz	S.26
3.2.2 Betrachtung von Halbwärtszeiten	S.28
3.2.3 Beurteilung und Fazit zum zweiten Experiment	S.29
3.3 Betrachtung des Erwärmungsexperimentes	S.29
3.3.1 Standardansatz	S.29
3.3.2 Vertiefende Überlegungen zum Problem	S.30
3.3.2.1 Berücksichtigung von Konvektion	S.30
3.3.2.2 praktisches Experiment, Veranschaulichungen	S.31
3.3.2.3 mathematische Beschreibung	S.33
3.3.3 Beurteilung und Fazit zum dritten Experiment	S.38
3.4 Vergleich aller Ergebnisse aus den Betrachtungen und Fazit	S.38
3.5 Antwortsatz	S.38

Aufgabe 4

4.1 Plan und Herangehensweise	S.39
4.2 Durchführung /Rechnung	S.39
4.2.1 Bekannte Werte	S.39
4.2.2 geometrische Betrachtung zur Ausdünnung	S.40
4.2.3 Leistungsberechnung mit Stefan-Boltzmann-Gesetz	S.40
4.2.4 Herleitung von Schätzformel zur Erdtemperatur	S.41
4.2.4 Berechnung der Temperatur Gegenwart/Zukunft	S.42
4.3 kurze Interpretation der Ergebnisse und Fazit	S.43

Nr.1



Hinweis:

Reibungseffekte, relativistische Effekte und quantenmechanische Effekte werden im folgenden vernachlässigt.

Plan:

Gesucht ist bekanntlich die Länge des fehlenden Teilstückes, das herausgeschnitten wird, damit der „Flug“ gelingt. Wenn man α kennen würde, wäre es ein Leichtes auch die beschriebene Länge zu bestimmen. Es muss also α gefunden werden. Um ein rechnerisch möglichst exaktes Ergebnis zu bekommen, wird die tatsächliche Länge von R bis kurz vorm Schluss nicht verwendet. Wir haben also prinzipiell zwei unbekannte (α , R), und das Verhältnis von der Höhe zum Radius (3) gegeben. Nun wird eine möglichst einfache allgemeine Formel gesucht um die Länge des fehlenden Teilstückes in Abhängigkeit von R zu berechnen. Zu diesem Zweck werden zwei Formeln hergeleitet: zum einen die Funktion der idealen ballistischen Flugbahn in Abhängigkeit von R und α mit Ursprung des Koordinatensystems in der „Absprungstelle“ (gleichzeitig erste triviale Nullstelle), zum anderen eine vergleichsweise einfache Formel für den Abstand zwischen den prinzipiell möglichen Absprung und Landepunkten in Abhängigkeit von R und α (Abstand = $2 \cdot \sin(\alpha) \cdot R$). Die zweite Nullstelle der Flugkurven-Funktion muss nun den gleichen Betragswert als Abstand annehmen, damit der Flug funktioniert. Daher wird eine Gleichung zur Bestimmung der nicht-trivialen Nullstelle hergeleitet, und diese mit der einfachen Abstandsfunktion (Abstand = $2 \cdot \sin(\alpha) \cdot R$) gleichgesetzt. In Folge dessen ergibt sich eine Gleichung die nur noch von α abhängig ist und mittels Substitution nach α gelöst wird. Die Berechnung des fehlenden Teilstückes erfolgt anschließend durch die Standardformel: Länge = $(\alpha(\text{Bogenmaß}) \cdot R) \cdot 2$.

Bemerkungen zur Durchführung:

der Anschaulichkeit wegen wird die Flugkurve an der y-Achse gespiegelt. Das hat allerdings zur Folge, dass die nichttriviale Nullstelle der „Flugfunktion“ negativ sein wird. Es ist also mathematisch notwendig von einer negativen Länge auszugehen. Daher wird auch die negative einfache Abstandsfunktion verwendet (Abstand = $-2 \cdot \sin(\alpha) \cdot R$). Des Weiteren mache ich auf die anwendungsbezogenen Definitionsbereiche aufmerksam. Für α muss z.B. gelten $0 < \alpha < 90$. Dies macht Kürzen mit Sinus und Cosinus möglich. Rückschlüsse auf Winkelbeziehungen sind jeder Skizze eindeutig zu entnehmen, so dass trigonometrische Formeln und Winkel Bestimmungen etc. eindeutig nachvollzogen werden können. Die Überprüfung der Steigung im Landepunkt ist auf Grund der Symmetrie der Parabel und des Loopings (selbe Symmetrie-Achse) nicht nötig.

Folgende vier grundlegende physikalische Formeln werden vorausgesetzt (sowie fundierte mathematische Formeln z.B. pq-Formel) (potenzielle Energie („Höhenenergie“), kinetische Energie („Bewegungsenergie“), zurückgelegte Strecke bei gleichförmiger Bewegung, zurückgelegte Strecke bei gleichförmig beschleunigter Bewegung):

Formeln:

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot \Delta h$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$S_x = v_{x0} t$$

$$S_y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{y0} t$$

Durchführung:

begonnen wird zunächst damit eine Geschwindigkeitsformel in Abhängigkeit von R und α aufzustellen:

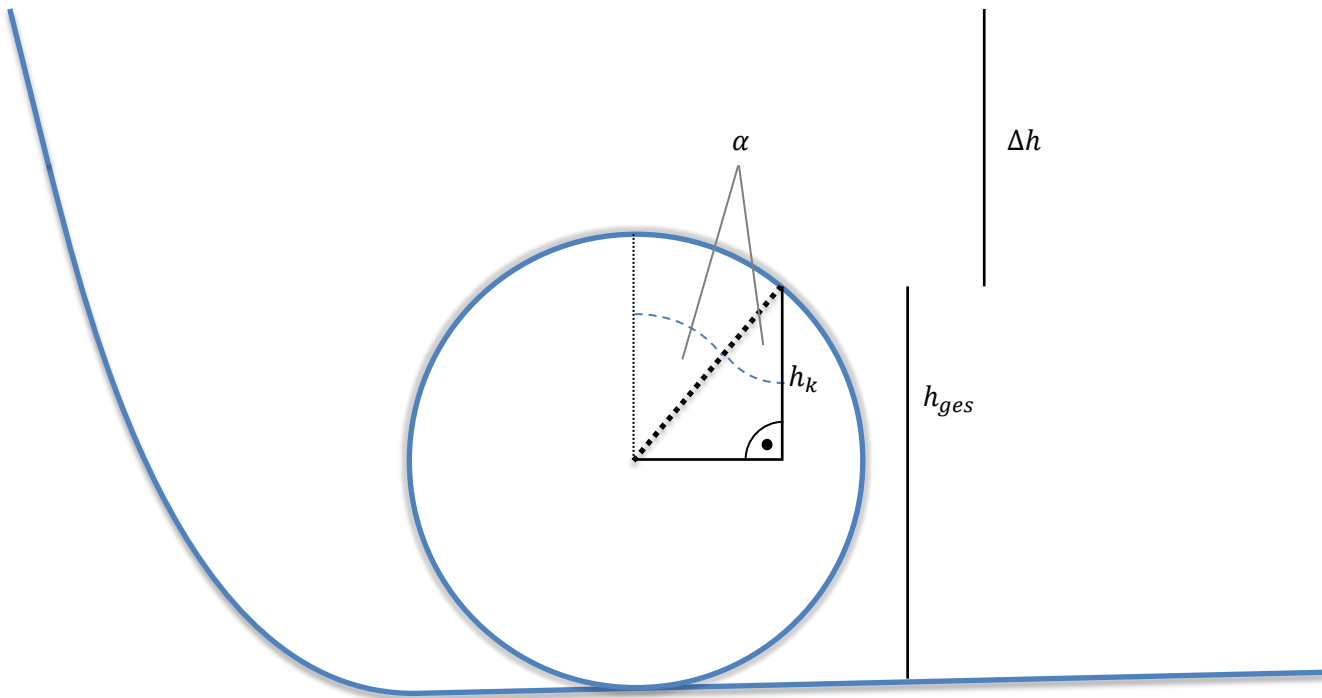
Rechnung:

$$E_{pot} = E_{kin}$$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot \Delta h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot \Delta h}{m} = v^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} = v$$



$$\cos(\alpha) = \frac{h_k}{R}$$

$$\Rightarrow h_k = \cos(\alpha) * R$$

$$\Rightarrow h_{ges} = R + \cos(\alpha) * R$$

$$\Rightarrow \Delta h = 3R - h_{ges}$$

$$\Delta h = 3R - (R + \cos(\alpha) * R)$$

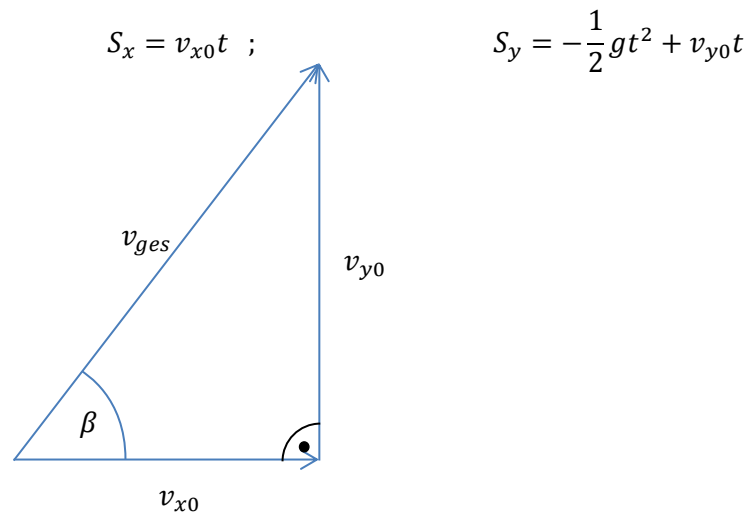
$$\Delta h = 2R - \cos(\alpha) * R$$

$$\Rightarrow \Delta h = R * (2 - \cos(\alpha))$$

$$\sqrt{2 * g * \Delta h} = v$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 * g * R * (2 - \cos(\alpha))} = v$$

Nun erfolgt die Berechnung der idealen ballistischen Flugbahn ohne Luftwiderstand in Abhängigkeit vom Abwurfwinkel und der Anfangsgeschwindigkeit:



$$\sin(\beta) = \frac{v_{y0}}{v_{ges}} \Rightarrow v_{y0} = \sin(\beta) * v_{ges}$$

$$\cos(\beta) = \frac{v_{x0}}{v_{ges}} \Rightarrow v_{x0} = \cos(\beta) * v_{ges}$$

$$S_x = \cos(\beta) * v_{ges} * t$$

$$S_y = -\frac{1}{2} g t^2 + \sin(\beta) * v_{ges} t$$

$$\Rightarrow t = \frac{S_x}{\cos(\beta) * v_{ges}}$$

$$\Rightarrow S_y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{S_x}{\cos(\beta) * v_{ges}} \right)^2 + \sin(\beta) * v_{ges} \frac{S_x}{\cos(\beta) * v_{ges}}$$

$$S_y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{S_x}{\cos(\beta) * v_{ges}} \right)^2 + \sin(\beta) * \frac{S_x}{\cos(\beta)}$$

$$S_y = -\frac{g}{2 * \cos^2(\beta) * v_{ges}^2} * S_x^2 + \tan(\beta) * S_x$$

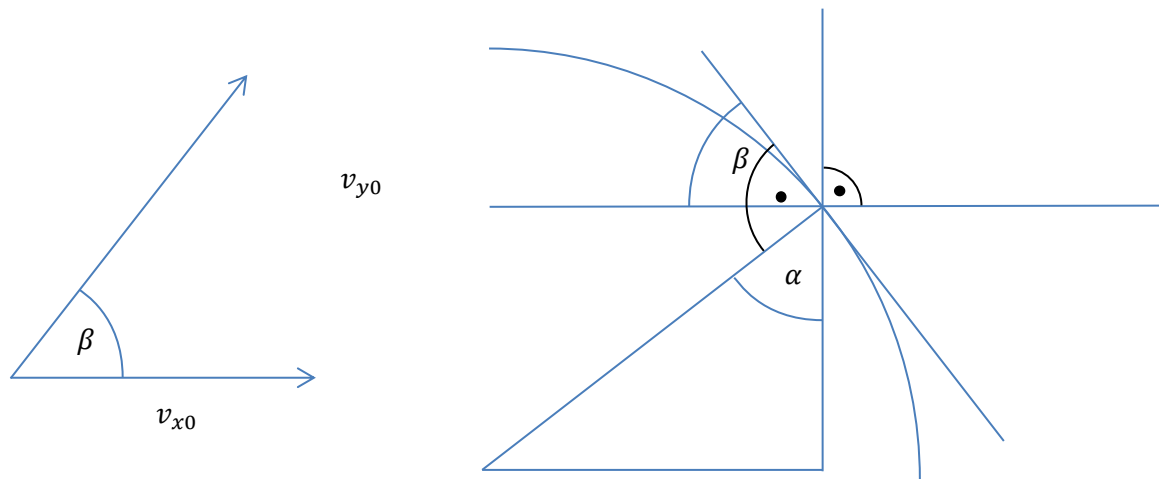
$$\Rightarrow S_\beta(x) = -\frac{g}{2 * \cos^2(\beta) * v_{ges}^2} * x^2 + \tan(\beta) * x$$

Spiegeln der Funktion an der y-Achse:

$$\Rightarrow f_{\beta}(x) = -\frac{g}{2 * \cos^2(\beta) * v_{ges}^2} * x^2 - \tan(\beta) * x$$

Nun wird die Formel durch Ersetzen von v_{ges} und β weiter an das Problem angepasst.

Problembezogene Überlegungen zu der Beziehung zwischen α und β :



$$\Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\Rightarrow f_{\alpha}(x) = -\frac{g}{2 * \cos^2(\alpha) * v_{ges}^2} * x^2 - \tan(\alpha) * x$$

$$\sqrt{2 * g * R * (2 - \cos(\alpha))} = v_{ges}$$

$$\Rightarrow f_{\alpha}(x) = -\frac{g}{2 * \cos^2(\alpha) * \sqrt{2 * g * R * (2 - \cos(\alpha))}^2} * x^2 - \tan(\alpha) * x$$

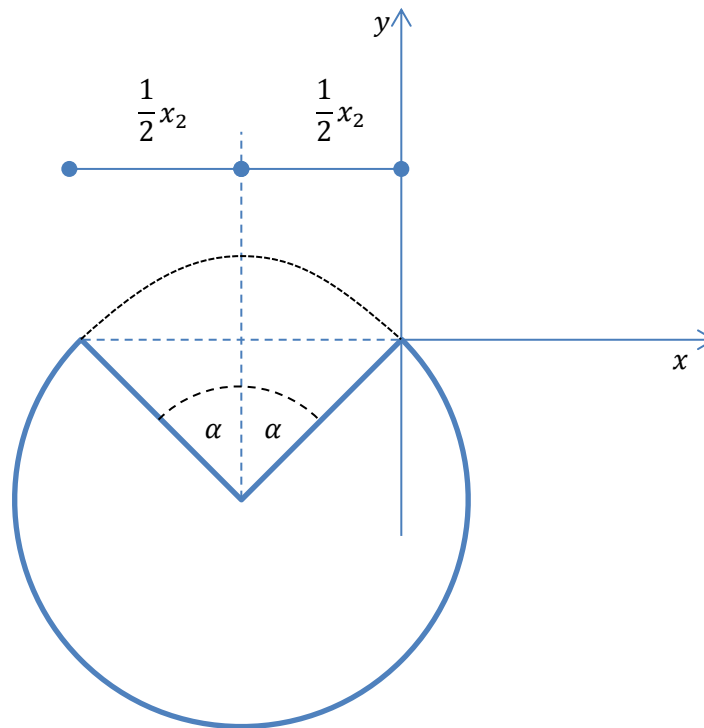
$$f_{\alpha}(x) = -\frac{g}{2 * \cos^2(\alpha) * 2 * g * R * (2 - \cos(\alpha))} * x^2 - \tan(\alpha) * x$$

$$f_{\alpha}(x) = -\frac{1}{4 * R * (2 - \cos(\alpha)) * \cos^2(\alpha)} * x^2 - \tan(\alpha) * x$$

Anwendungsbezogen gilt:

$$f_\alpha(x) = -\frac{1}{4 * R * (2 - \cos(\alpha)) * \cos^2(\alpha)} * x^2 - \tan(\alpha) * x \quad 0 < \alpha < 90$$

Jetzt folgt die Berechnung von Alpha über das Herleiten von Abstandsbedingungen durch Berechnung von Nullstellen(1.) ($x_1 = 0$ (trivial), x_2) (Ursprung liegt im „Abflugpunkt“) und das Finden einer weiteren Bedingung(2.):



(1.) Nullsetzen $0 = f_\alpha(x)$

$$0 = -\frac{1}{4 * R * (2 - \cos(\alpha)) * \cos^2(\alpha)} * x^2 - \tan(\alpha) * x$$

$$0 = x \left(-\frac{1}{4 * R * (2 - \cos(\alpha)) * \cos^2(\alpha)} * x - \tan(\alpha) \right)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

$$0 = -\frac{1}{4 * R * (2 - \cos(\alpha)) * \cos^2(\alpha)} * x - \tan(\alpha)$$

$$\Rightarrow x_2 = -\tan(\alpha) * 4 * R * (2 - \cos(\alpha)) * \cos^2(\alpha)$$

$$(2.) \quad \sin(\alpha) = \frac{-\frac{1}{2}x_2}{R}$$

$$\Rightarrow x_2 = -2 * \sin(\alpha) * R$$

$$\Rightarrow -\tan(\alpha) * 4 * R * (2 - \cos(\alpha)) * \cos^2(\alpha) = -2 * \sin(\alpha) * R$$

$$\sin(\alpha) = \tan(\alpha) * 2 * (2 - \cos(\alpha)) * \cos^2(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = 4 * \tan(\alpha) * \cos^2(\alpha) - 2 * \tan(\alpha) * \cos^3(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = 4 * \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} * \cos^2(\alpha) - 2 * \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} * \cos^3(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = 4 * \sin(\alpha) * \cos(\alpha) - 2 * \sin(\alpha) * \cos^2(\alpha)$$

$$0 = 4 * \sin(\alpha) * \cos(\alpha) - 2 * \sin(\alpha) * \cos^2(\alpha) - \sin(\alpha)$$

$$0 = \sin(\alpha) (4 * \cos(\alpha) - 2 * \cos^2(\alpha) - 1) \quad \Rightarrow \alpha = 0 \notin D_f$$

$$\Rightarrow 0 = -2 * \cos^2(\alpha) + 4 * \cos(\alpha) - 1$$

Substitution:

$$u := \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow -2 * u^2 + 4 * u - 1 = 0$$

$$u^2 - 2 * u + \frac{1}{2} = 0$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$u_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}}$$

$$u_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}}$$

$$u_{1/2} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Rücksubstitution:

$$u_1 = \cos(\alpha)_1 = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha_1 = \arccos\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow \text{keine Lösung da } D_{\cos^{-1}} = [-1; 1]$$

$$u_2 = \cos(\alpha)_2 = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha_2 = \arccos\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow \alpha_2 \approx 72,96875154^\circ \approx 73^\circ$$

Umfang eines Kreises:

$$U = 2 * \pi * r$$

fehlendes Teilstück:

$$L = 2 * \arccos\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) * R$$

gegeben war $R = 0,4m$

$$L = 2 * \arccos\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) * 0,4m \approx 1,018835972m \approx 1,02m$$

Hinweis:

hält man das Verhältnis(c) von Radius zur Höhe allgemein, gilt:

$$\Rightarrow \Delta h = cR - h_{ges}$$

$$\Delta h = cR - (R + \cos(\alpha) * R)$$

$$\Delta h = cR - R - \cos(\alpha) * R$$

$$\Rightarrow \Delta h = R * (c - 1 - \cos(\alpha))$$

$$\sqrt{2 * g * \Delta h} = v$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 * g * R * (c - 1 - \cos(\alpha))} = v$$

gleichet man das ab mit dem oben verwendeten

$$\sqrt{2 * g * R * (2 - \cos(\alpha))} = v$$

stellt man fest, dass der letzte Faktor in der Wurzel sich durch die ganze Rechnung zieht. Man kann ihn also durch $\sqrt{2 * g * R * (c - 1 - \cos(\alpha))} = v$ allgemein ersetzen und mit selben Ansatz weiterrechnen:

$$\sin(\alpha) = \tan(\alpha) * 2 * (2 - \cos(\alpha)) * \cos^2(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \tan(\alpha) * 2 * (c - 1 - \cos(\alpha)) * \cos^2(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = 2 * c * \tan(\alpha) * \cos^2(\alpha) - 2 * \tan(\alpha) * \cos^2(\alpha) - 2 * \tan(\alpha) * \cos^3(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = 2 * c * \sin(\alpha) * \cos(\alpha) - 2 * \sin(\alpha) * \cos(\alpha) - 2 * \sin(\alpha) * \cos^2(\alpha)$$

$$0 = \sin(\alpha)(2 * c * \cos(\alpha) - 2 * \cos(\alpha) - 2 * \cos^2(\alpha) - 1)$$

$$0 = 2 * c * \cos(\alpha) - 2 * \cos(\alpha) - 2 * \cos^2(\alpha) - 1$$

$$0 = 2 * (c - 1) * \cos(\alpha) - 2 * \cos^2(\alpha) - 1$$

Substitution:

$$u := \cos(\alpha)$$

$$0 = -2u^2 + 2 * (c - 1) * u - 1$$

$$0 = u^2 - (c - 1) * u + 0,5$$

$$u_{1/2} = \frac{(c - 1)}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{c - 1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}}$$

$$u_{1/2} = \frac{(c - 1)}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 2c + 1 - 2}{4}}$$

$$u_{1/2} = \frac{(c - 1)}{2} \pm \frac{1}{2} * \sqrt{c^2 - 2c - 1}$$

$$u_{1/2} = \frac{1}{2} * ((c - 1) \pm \sqrt{c^2 - 2c - 1})$$

Rücksubstitution:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2} * ((c - 1) \pm \sqrt{c^2 - 2c - 1})\right)$$

Definitionsbereiche:

Asymptote von $\sqrt{c^2 - 2c - 1}$

$$\sqrt{c^2 - 2c - 1} = \sqrt{c^2 - 2c + 1 - 2} = \sqrt{(c - 1)^2 - 2} = \sqrt{1 - \frac{2}{(c - 1)^2}} * \sqrt{(c - 1)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{c^2 - 2c - 1} = \sqrt{1 - \frac{2}{(c - 1)^2}} * (c - 1)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{2}{(c - 1)^2}} = 1$$

$\Rightarrow c - 1$ ist Asymptote

der Definitionsbereich der Arkuskosinus geht von $x=-1$ bis $x=1$:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} * ((c - 1) \pm \sqrt{c^2 - 2c - 1}) = 1$$

$$\Rightarrow c = 2,5$$

insgesamt folgt daraus:

$$\alpha(c) = \arccos\left(\frac{1}{2} * ((c - 1) - \sqrt{c^2 - 2c - 1})\right) \quad D_\alpha = [2,5; \infty[$$

für die Länge des fehlenden Teilstücks gilt also:

$$L(a(c)) = 2 * a(c) * R$$

$$L(c) = 2 * \arccos\left(\frac{1}{2} * ((c - 1) - \sqrt{c^2 - 2c - 1})\right) * R \quad D_L = [2,5; \infty[$$

mit gegebener Starthöhe h:

$$h = R * c \Rightarrow c = \frac{h}{R}$$

$$L(R, h) = 2 * \arccos \left(\frac{1}{2} * \left(\left(\frac{h}{R} - 1 \right) - \sqrt{\left(\frac{h}{R} \right)^2 - 2 \frac{h}{R} - 1} \right) \right) * R \quad \text{mit } \frac{h}{R} \geq 2,5; h \in \mathbb{R}^+; R \in \mathbb{R}^+$$

gegeben war:

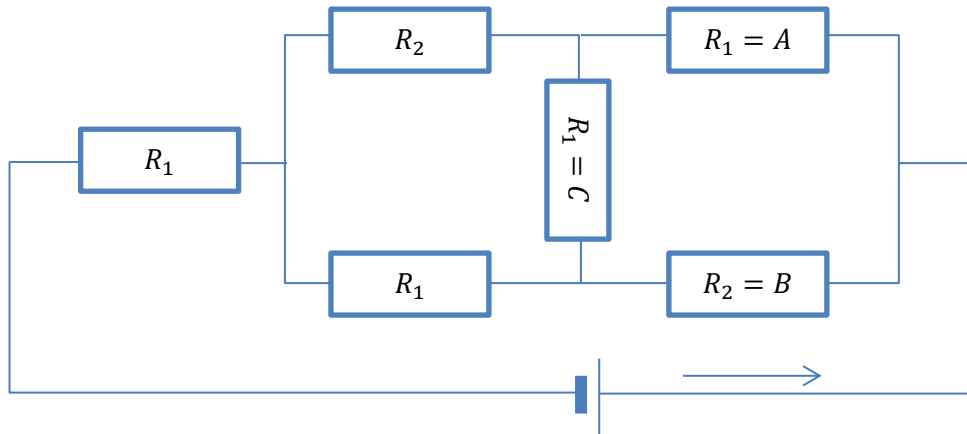
$$R = 0,4m$$

$$h = 1,2m$$

$$L(0,4, 1,2) \approx 1,018835972 \approx 1,02$$

Das fehlende Teilstück des Loopings ist ca. 1,02m lang.

Nr.2

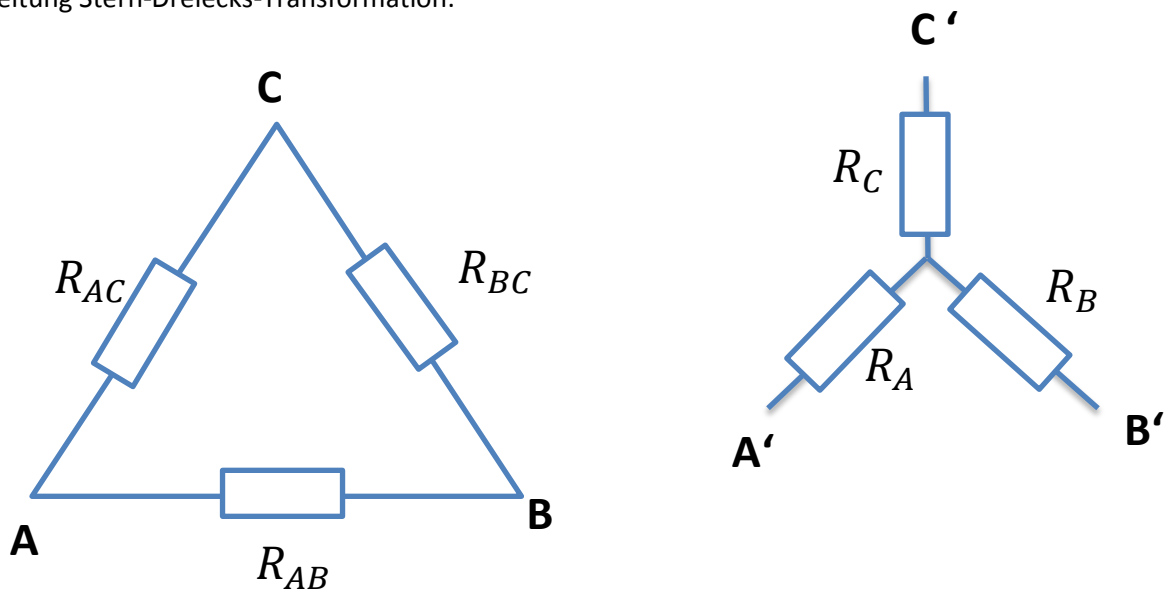


Plan:

da es sich nur um Gleichstrom handelt führen wir zunächst an der Schaltung eine Stern-Dreiecks-Transformation durch. Der Gesamtwiderstand wird dann für die beiden Fälle in Abhängigkeit vom normalem einfach gewertetem R berechnet. Über einfachen Dreisatz kommt man dann zum Ergebnis.

Durchführung:

Herleitung Stern-Dreiecks-Transformation:



Ansatz:

$$\frac{U}{I} = R$$
$$\frac{U_{AC}}{I_{AC}} = \frac{U_{A'C'}}{I_{A'C'}}$$

Es gilt in der Dreiecksschaltung (Stromanschluss bei A und B):

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{AC} + R_{BC}}$$

bzw.

$$R_{gesD} = \frac{R_{AB} * (R_{AC} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

$$R_{gesD} = \frac{R_{AB} * R_{AC} + R_{AB} * R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

Es gilt in der Sternschaltung (Stromanschluss bei A' und B'):

$$R_{gesS} = R_A + R_B$$

aus

$$\frac{U_{AC}}{I_{AC}} = \frac{U_{A'C'}}{I_{A'C'}} \text{ und } \frac{U}{I} = R$$

folgt

$$R_{gesD} = R_{gesS}$$

bzw.

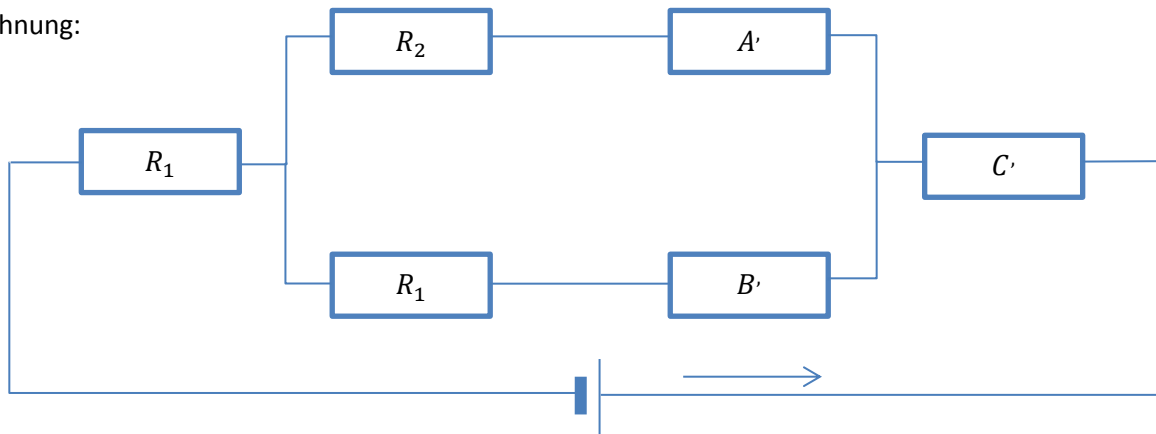
$$\frac{R_{AB} * R_{AC} + R_{AB} * R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} = R_A + R_B$$

genauso kann man für die restlichen Anschlussmöglichkeiten vorgehen, erhält ein allgemeines Gleichungssystem, das dann nach R_A , R_B und R_C bzw. nach R_{AB} , R_{AC} und R_{BC} aufgelöst werden kann und erhält die drei Transformationsgleichungen, die in der eigentlichen Rechnung verwendet werden.

$$\frac{R_{AC} * R_{AB} + R_{AC} * R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} = R_A + R_C$$

$$\frac{R_{BC} * R_{AB} + R_{BC} * R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} = R_B + R_C$$

Rechnung:



$$A' = \frac{A * B}{A + B + C}$$

$$B' = \frac{B * C}{A + B + C}$$

$$C' = \frac{A * C}{A + B + C}$$

Fall 1:

mit:

$$A = R_1 = R$$

$$B = R_2 = R$$

$$C = R_1 = R$$

$$A' = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R$$

$$B' = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R$$

$$C' = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R$$

Berechnung des Widerstandsverhältnisses der Gesamtschaltung zum einzelnen Kondensator bei gleichen Widerständen:

$$\frac{1}{R_{\text{mitte}}} = \frac{1}{A' + R_2} + \frac{1}{B' + R_1}$$

$$R_{mitte} = \frac{1}{\frac{1}{A' + R_2} + \frac{1}{B' + R_1}}$$

$$R_{mitte} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{3}R + R} + \frac{1}{\frac{1}{3}R + R}}$$

$$R_{mitte} = \frac{1}{\frac{3}{4R} + \frac{3}{4R}}$$

$$R_{mitte} = \frac{1}{\frac{6}{4R}}$$

$$R_{mitte} = \frac{4}{6}R = \frac{2}{3}R$$

$$R_{ges} = C' + R_{mitte} + R_1$$

$$R_{ges} = \frac{1}{3}R + \frac{2}{3}R + R = 2R$$

Fall 2:

mit:

$$A = R_1 = R$$

$$B = R_2 = 2R$$

$$C = R_1 = R$$

$$A' = \frac{2R^2}{4R} = \frac{1}{2}R$$

$$B' = \frac{2R^2}{4R} = \frac{1}{2}R$$

$$C' = \frac{R^2}{4R} = \frac{1}{4}R$$

Berechnung des Widerstandsverhältnisses der Gesamtschaltung zum einzelnen einfach widerstandswertigen Kondensator mit oben beschriebenen Widerstandsverhältnisse zu R_1 .

$$R_{mitte} = \frac{1}{\frac{1}{A' + R_2} + \frac{1}{B' + R_1}}$$

$$R_{mitte} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}R + 2R} + \frac{1}{\frac{1}{2}R + R}}$$

$$R_{mitte} = \frac{1}{\frac{2}{5R} + \frac{2}{3R}}$$

$$R_{mitte} = \frac{1}{\frac{16}{15R}}$$

$$R_{mitte} = \frac{15}{16}R$$

$$R_{ges} = C' + R_{mitte} + R_1$$

$$R_{ges} = \frac{1}{4}R + \frac{15}{16}R + R = \frac{35}{16}R$$

$$R_{1.ges} = 2R$$

$$R_{2.ges} = \frac{35}{16}R$$

$$I_1 = 1A$$

$$\frac{U}{R} = I$$

$$\frac{U}{2R} = 1A \Rightarrow \frac{1}{2} * \frac{U}{R} = 1A$$

$$\frac{U}{\frac{35}{16}R} = I \Rightarrow \frac{16}{35} * \frac{U}{R} = I$$

Anwendung des Dreisatzes:

$$\Rightarrow I_2 = 2A * \frac{16}{35} = \frac{32}{35} A = 0,9142857A \approx 0,914A$$

Damit beträgt der gesuchte Strom ca. 0,914A.

Nr.3

Zunächst betrachten wir das erste vorgeschlagene Experiment mit dem Flummi:

gegeben:

-ebene Abprallfläche 20 cm über dem Boden

-der Flummi prallt auf die Fläche, nach dem Stoß wird die Höhe(cm) des Flummis zur Zeit(ms) aufgetragen

Typischer Ansatz:

$$m * \ddot{S} = -m * g$$

Gleichförmige Beschleunigung:

$$\iint -g dt^2 = \int -gt + v_0 dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

wir wissen:

$$g \approx 9,81 \frac{m}{s^2} = 9,81 * 10^{-4} \frac{cm}{ms^2}$$

$$s_0 \approx 20cm$$

Geschwindigkeit:

Die Näherungskurve hat eine kontinuierliche Rechtskrümmung und der zweite Messwert liegt leicht über dieser Kurve. Das bedeutet, dass die Anfangsgeschwindigkeit sich daher annäherungsweise gut als die Steigung zwischen den beiden ersten Messwerten bestimmen lässt:

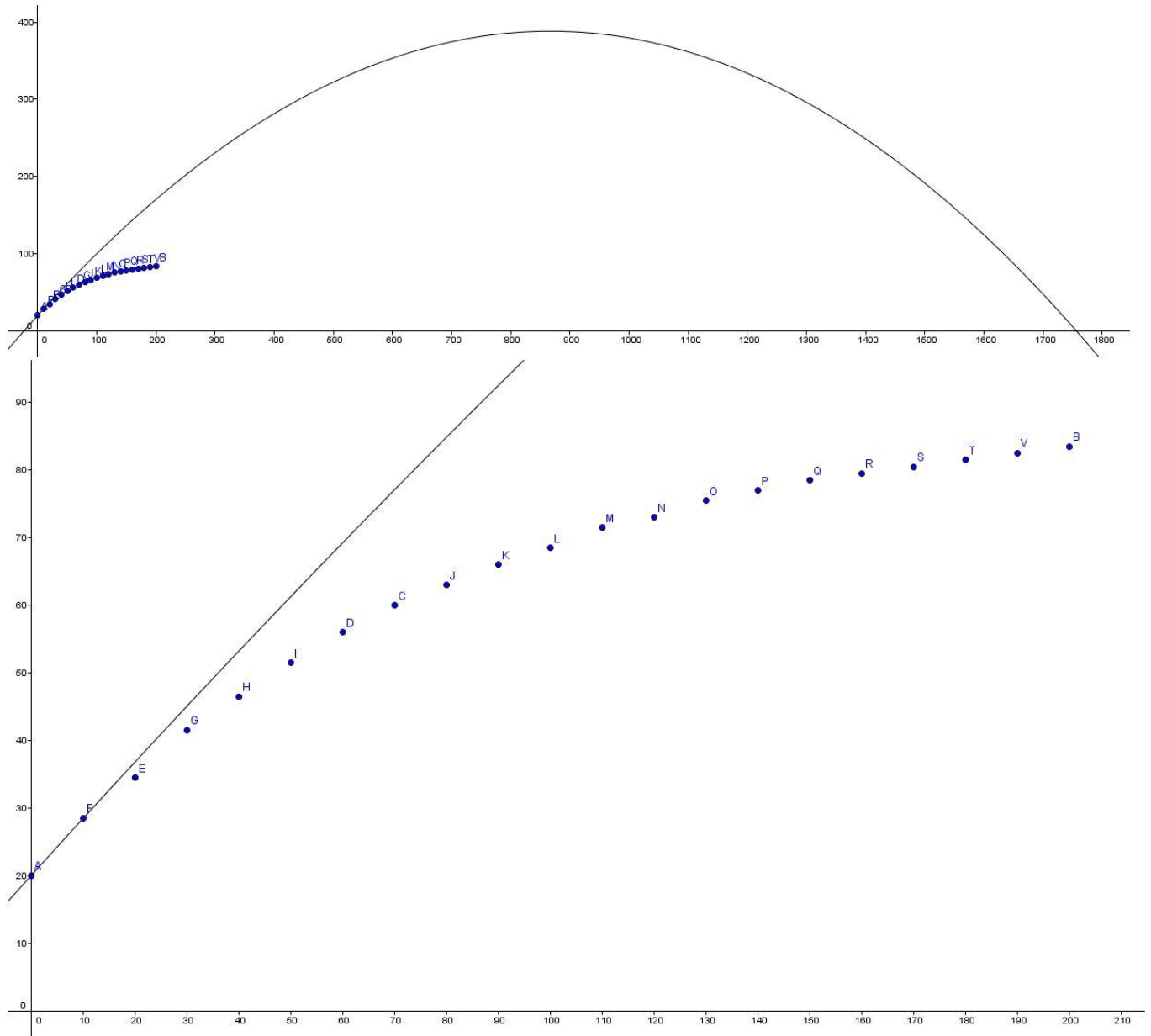
$$\frac{28,5cm - 20cm}{10ms - 0ms} = 0,85 \frac{cm}{ms} \approx v_0$$

mit diesen Werten lässt sich die Gleichung für die höhe in Abhängigkeit der Zeit bestimmen:

$$h(t) = -\frac{1}{2} * 9,81 * 10^{-4} * t^2 + 0,85 * t + 20$$

h(t) in cm, t in ms

Vergleicht man den entstehenden Graphen mit den Punkten wird deutlich: Punkte und Graph passen nicht zusammen:



Ein quadratischer Zusammenhang lässt sich also zumindest mit der Fallbeschleunigung auf der Erde ausschließen. Auch eine Regressionsanalyse nach der Methode der kleinsten Quadrate bestätigt diesen Eindruck:

$$\mathcal{L}(a, b, c) = \sum_{i=1}^k (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min$$

Wobei y_i die Werte des quadratischen Regressionsmodells (in diesem Fall: $at^2 + bt + c$) sind und \hat{y}_i die tatsächlichen Messwerte sind. Nach der üblichen Vorgehensweise berechnet man die optimale Funktion aus: 1. Einsetzen aller Messwerte und aller Zeiten 2. Die vierdimensionale Funktion weiter vereinfachen 3. Über partielles Ableiten den Tiefpunkt bestimmen. Da diese Strategie häufig erheblichen Aufwand bedeuten würde, lässt man das Ganze numerisch von einem Computer lösen:

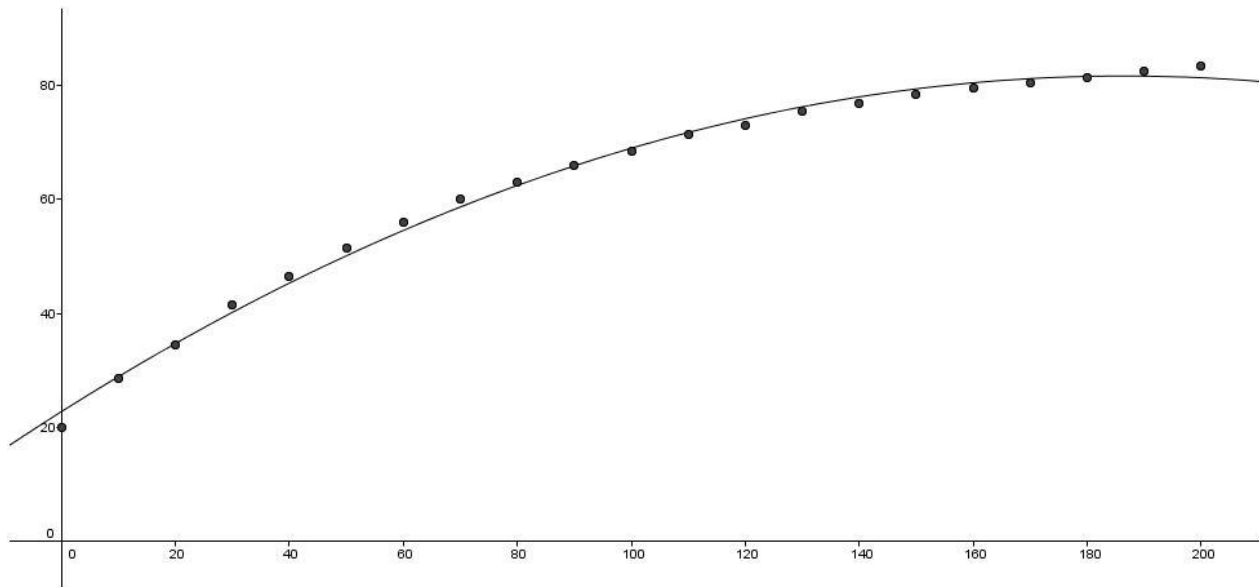
Es ergibt sich:

$$a \approx -0,0017$$

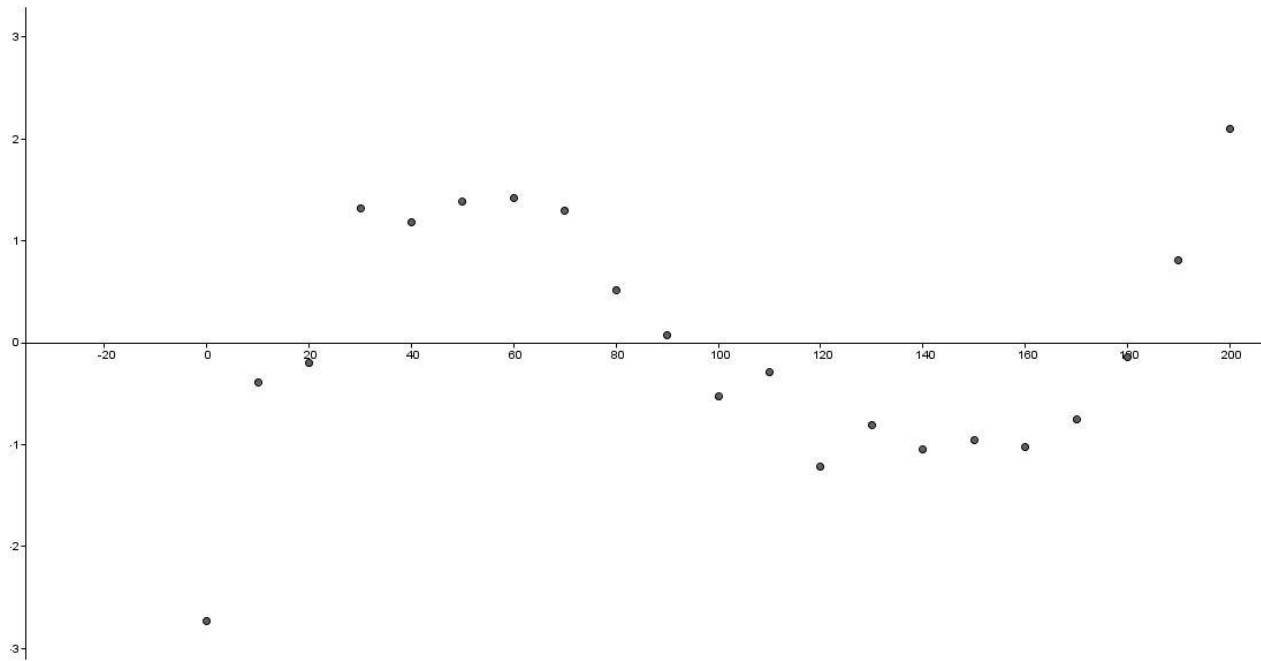
$$b \approx 0,63264$$

$$c \approx 22,7284$$

Geplottet sieht die Parabel ($ax^2 + bx + c$) im Vergleich zu den Messwerten wie folgt aus:



Es lässt sich nun ein systematischer Fehler erkennen, wenn man die Differenzen zwischen Messwerten und Modell ebenfalls in ein Diagramm einträgt:



Es liegt also kein quadratischer-Zusammenhang vor.

Was wurde vernachlässigt?

Nach dem Standardansatz wurde vereinfacht angenommen, dass weder Rotation(Magnus-Effekt) noch Luftwiderstand noch Auftriebseffekte vorhanden sind. Die Aerodynamik wurde also komplett außer acht gelassen.

Hinweis: Die folgenden Gleichungen haben nicht den Anspruch auf eine exakte Lösung, sondern dienen dazu eine Idee zu geben, was passieren könnte bzw. passiert, und zeigen die Komplexität auf, die ein scheinbar einfaches Experiment in der Realität hat.

Luftwiderstand:

Berechnung nach der einfachen Stokeschen Luftreibung: $-\beta * v$

mit $\beta = 6\pi\eta r$

Auftriebskraft:

-beeinflusst nur die Fallbeschleunigung (vernachlässigen wir)

Magnus-Kraft für Zylinder(für Kugeln käme in der unteren hergeleiteten Formel nur noch eine Konstante hinzu, die im Windkanal oder numerisch mit Hochleistungsrechnern ermittelt werden muss. Im übrigen wirkt die Magnus- Kraft orthogonal zur Bewegungsrichtung):

Herleitung:

Bernoulli Formel:

$$\Delta p = p_{unten} - p_{oben}$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} * \rho_L * (v_o^2 - v_u^2)$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{1}{2} * \rho_L * ((v_m + \omega r)^2 - (v_m - \omega r)^2)$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} * \rho_L * (v_m^2 + 2v_m\omega r + (\omega r)^2 - v_m^2 + 2v_m\omega r - (\omega r)^2)$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} * \rho_L * (4v_m\omega r)$$

$$\Delta p = 2 * \rho_L * v_m * \omega * r$$

mit $F = p * A$

$$F = 2 * \rho_L * v_m * \omega * r * A$$

Δp : Druckdifferenz von Oberhalb zu Unterhalb der Kugel

ρ_L : Luftdichte

v_o : Luftgeschwindigkeit oberhalb der Fläche

v_u : Luftgeschwindigkeit unterhalb der Fläche

v_m : Höchstgeschwindigkeit der Potenzialströmung

ω : Winkelgeschwindigkeit

r : Radius

A : Querschnittsfläche

Berücksichtigung des Luftwiderstandes (sollte sich nicht erheblich auf das Ergebnis auswirken):

$$m * \ddot{S} = -m * g - \beta * \dot{S}$$

Berücksichtigung des Magnus-Effekts:

$$F = 2 * \rho_L * v_m * \omega * r * A$$

$$m * \ddot{S} = -m * g - \beta * \dot{S} - \cos(\alpha(t)) * 2 * \rho_L * v_m * \omega * r * A$$

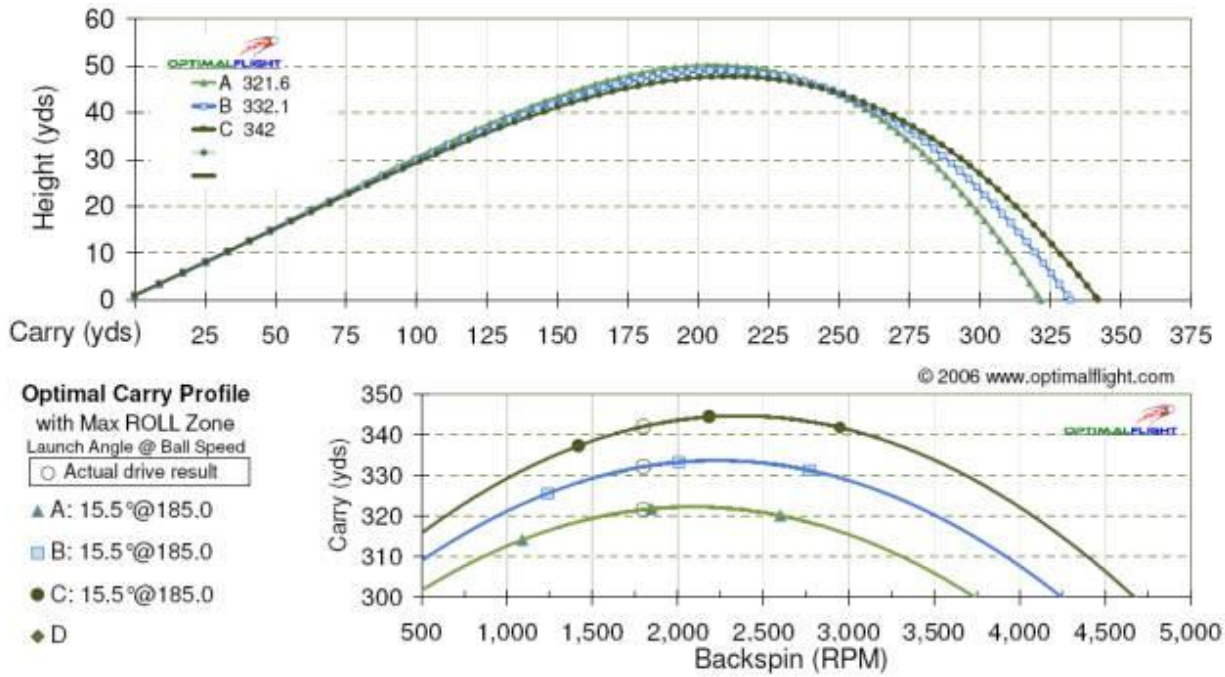
α ist der Winkel der momentanen Bewegungsrichtung zum Boden. Wir nutzen \cos , weil uns nur der Vertikalanteil interessiert und die Magnus- Kraft orthogonal zur Bewegungsrichtung wirkt (vektoriell kommt das Kreuzprodukt vor). α ist von t abhängig.

Mit $v_m = \sqrt{\dot{S}^2 + V_x(t)^2}$ (bezieht man auch horizontal den Luftwiderstand mit ein, ist V_x von t abhängig.)

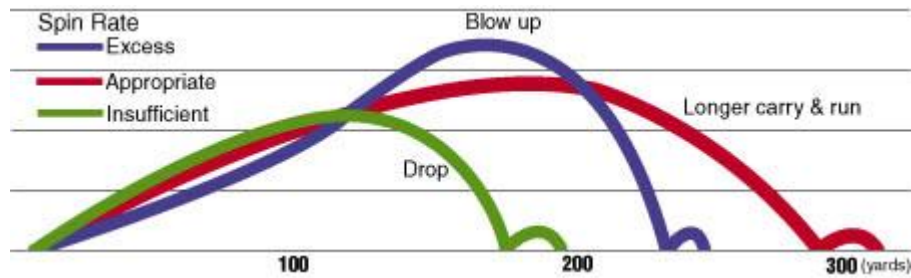
$$m * \ddot{S} = -m * g - \beta * \dot{S} - \cos(\alpha(t)) * 2 * \rho_L * \sqrt{\dot{S}^2 + v_x(t)^2} * \omega * r * A$$

Diese (angedeutete) Gesetzmäßigkeit beschreibt die Funktion der Höhe eines um seine Achse rotierenden Zylinders (Vergleichbar mit Kugel), mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes und unter Annahme von nicht turbulenten Strömungen (ansonsten oben Newtons Ströme mit quadratischem v benutzen) und absoluter Windstille. Bekannt seien dabei: Anfangsgeschwindigkeit und deren Richtung, Anfangsposition, Radius, Rotationengeschwindigkeit (als konstant angenommen), Dichte der Luft (als konstant angenommen), Viskosität der Luft (als konstant angenommen), Querschnittsfläche.

Am Beispiel eines Golfballes(Komplette Flugkurve):



http://www.qualitygolfstats.com/optimalflight_files/image008.jpg



http://ffden-2.phys.uaf.edu/211_fall2002.web.dir/josh_fritts/spin_trajectory.jpg

Man erkennt also, dass unter bestimmten Rahmenbedingungen (genug Rotation, Wind, etc.) die unterschiedlichsten Kurven festzustellen sind. Aus Mangel an bekannten Rahmenbedingungen (einzige Angabe: Absprungpunkt 20 cm über dem Boden) ist also durch die reine Untersuchung des ersten Problems nicht eindeutig auszuschließen, dass die Kurve von dem beschriebenen Flummi-Experiment stammt. Festzustellen ist nur, dass wenn die gegebenen Messwerte zum ersten Experiment gehören sollten, der Flummi erheblichen Drall gehabt haben muss... Vergleicht man die gegebene Kurve mit der grünen oder roten in der Abbildung so erkennt man bis zum Hochpunkt eine Ähnlichkeit in der Form, die die gegebene Kurve sehr gut trifft. Bedenken muss man auch, dass der vorhergehende Aufprall eine eventuelle Rotation des Flummis erheblich dämpft. Auch muss man feststellen, dass der Luftwiderstand alleine nicht ausschlaggebend sein kann. Bezieht man nur den Luftwiderstand mit ein, stellt man fest: Ein 10g Ball müsste einen Radius von 30cm haben, damit der Luftwiderstand alleine den zeitlichen Verlauf der Höhe auf eine ähnliche Bahn zwingt. Insgesamt ist also festzustellen, dass dieses Experiment nicht vollkommen auszuschließen ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Flummi genau den Umständen ausgesetzt ist, dass der Höhenverlauf den vorgegebenen Messwerten entspricht, ist allerdings minimal und unter normalen Umständen (kein Drall, kein Wind) so nicht gegeben.

Experiment 2:

Die Aufladung eines Kondensators:

gegeben:

$$\text{Kapazität } C = 6,8 * 10^{-6} F$$

$$\text{Widerstand } R = 3300000 \Omega$$

$$\text{Spannung bei } t_0 = 20 V$$

Angaben der Spannung(y-Achse) und der Zeit(x-Achse) am Diagramm in V und in s.

Typischer Ansatz:

bekannte U-t Aufladekurve des Kondensators:

$$U_c = U * (1 - e^{-\left(\frac{t}{R*C}\right)})$$

Da der Kondensator zum Zeitpunkt t=0 bereits auf 20V geladen ist. Muss man eine Verschiebung der Kurve nach links miteinbeziehen (einfaches hinzuaddieren von 20V funktioniert nicht):

$$U_c = U * (1 - e^{-\left(\frac{t+x}{R*C}\right)})$$

Es gilt in diesem Experiment:

$$20 = U * (1 - e^{-\left(\frac{x}{R*C}\right)})$$

$$1 - \frac{20}{U} = e^{-\left(\frac{x}{R*C}\right)}$$

$$\ln\left(1 - \frac{20}{U}\right) = -\frac{x}{R * C}$$

$$-\ln\left(1 - \frac{20}{U}\right) * R * c = x$$

$$U_c = U * (1 - e^{-\left(\frac{t - \ln\left(1 - \frac{20}{U}\right) * R * c}{R * C}\right)})$$

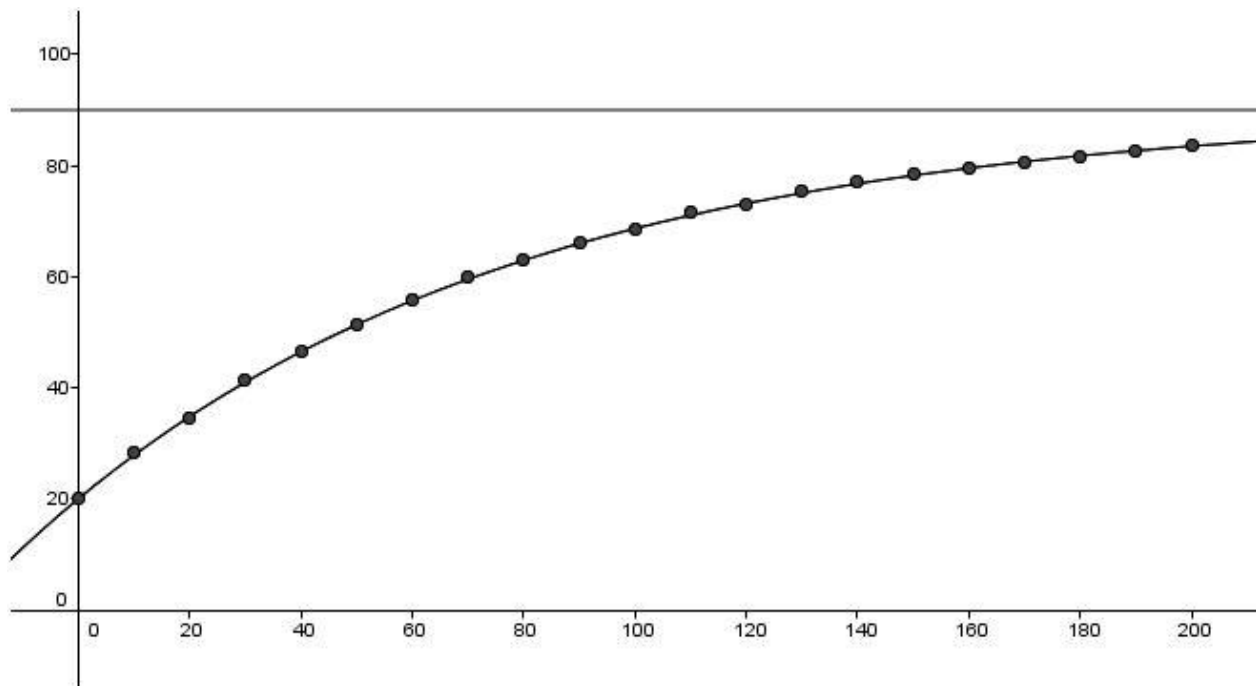
Auf ein exaktes Fitten wie oben wird diesmal verzichtet. Stattdessen nehmen wir uns zwei Punkte, bei denen die Messwerte sichtbar exakt auf der gegebenen Kurve liegen und errechnen eine Kurve der Form:

$$U_c = U * (1 - e^{-\left(\frac{t - \ln\left(1 - \frac{20}{U}\right) * R * c}{R * C}\right)})$$

$$P1(60,56) \quad P2(200,83.5)$$

R wird dabei als konstant 3300000Ω angenommen, da sich ansonsten unendlich viele Lösungen ergeben würden.

Es ergibt sich folgende Kurve (Angaben y: in V, Angaben x: in s) mit waagerechter Asymptote bei ca. 90V:



Dabei ergibt sich für:

$$U_c = U * \left(1 - e^{-\left(\frac{t - \ln\left(1 - \frac{20}{U}\right) * R * c}{R * C} \right)} \right)$$

$$C \approx 25,5 * 10^{-6} F (\text{unwichtig})$$

$$U \approx 90V$$

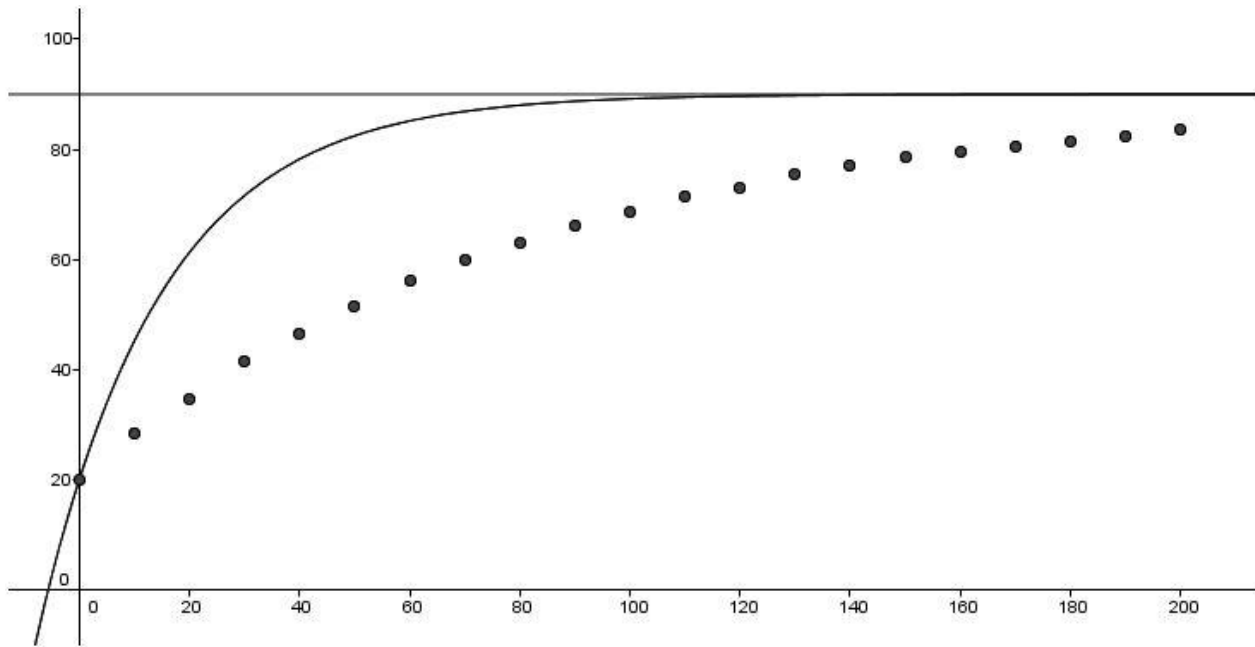
In dem oberen Graphen erkennt man, dass die Punkte sehr genau auf der Kurve liegen. Ein Zusammenhang nach einer beschränkten Wachstumsfunktion ist also sehr gut denkbar. Auch die 90V lassen sich plausibel als den asymptotischen y-Wert ablesen.

Setzt man nun die ursprünglich gegebenen Werte R, C und das bestimmte U ein ergibt sich folgendes:

$$C = 6,8 * 10^{-6} F$$

$$R = 3300000\Omega$$

$$U \approx 90V$$



Hier erkennt man spätestens, dass auch wenn man U nicht exakt (sondern z.B. durch Schätzen der Asymptoten Lage) bestimmt hat, die Kurve erheblich von den Punkten abweicht. Dies lässt sich auch durch Halbwertszeitabschätzungen feststellen, wobei sich in diesem Fall nach einer bestimmten Zeit der Abstand von Messwert bzw der Kurve zur Asymptote halbiert:

errechnet:

$$t_{\frac{1}{2}} = \ln(2) * R * C$$

$$t_{\frac{1}{2}} \approx 15,5542s$$

abgelesen:

$$P(0,20)$$

$$y - \text{Differenz: } 90 - 20 = 70$$

$$70/2 = 35$$

$$20 + 35 = 55$$

ablesen ergibt also: Nach ca.50s sind 55V erreicht. Die Halbwertszeit ist also abgelesen ca. 50s.

Dieses Ergebnis weicht erheblich von dem errechneten Wert ab(den man auch durch Schätzen an der Kurve in der Abbildung ungefähr bestimmen kann). Erkennt wurde also, dass sich die Punkte zwar durch beschränktes Wachstum hervorragend beschreiben lassen. Die aus den Werten konstruierte Kurve allerdings absolut nicht zu den Werten passt.

Was wurde vernachlässigt?

Vernachlässigt wurde, dass es noch einen zusätzlichen Innenwiderstand der Leitungen geben könnte. Um die Kurve aber auf die Punkte zu zwingen, wäre ein Gesamtwiderstand von ca. 12200000 Ω also zusätzliche 8900000 Ω nötig (einfach nachzurechnen mit Halbwertszeitformel). Diesen Umstand kann man deswegen ausschließen. Daher kommt man zwangsläufig zu dem Ergebnis, dass die Messwerte nicht zu dem Experiment passen. Unter der Annahme, dass die Aussagen über die Werte im Experiment richtig sind, muss man das Experiment also als Möglichkeit ausschließen.

Experiment 3:

gegeben:

$$V_{\text{Wasser}} = 100\text{ml} \rightarrow \text{für Wasser gilt: } m \approx 0,1\text{kg}$$

In einem Gefäß mit elektrischer Heizvorrichtung(Leistung $P=350$ Watt)

Angaben der Temperatur (y-Achse) und der Zeit(x-Achse) am Diagramm in $^{\circ}\text{C}$ und in s.

außerdem:

$$t_0 = 20^{\circ}\text{C} \approx 293.15\text{K}$$

$$\text{spezifische Wärmekapazität von Wasser } c \approx 4182 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

typischer Ansatz über die Grundgleichung der Wärmelehre(Q: thermische Energie, c: spezifische Wärmekapazität, m: Masse, ΔT :Temperaturdifferenz):

$$Q = c * m * \Delta T$$

mit (P: thermische Leistung)

$$t = \frac{Q}{P}$$

folgt:

$$t = \frac{c * m * \Delta T}{P}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{t * P}{c * m}$$

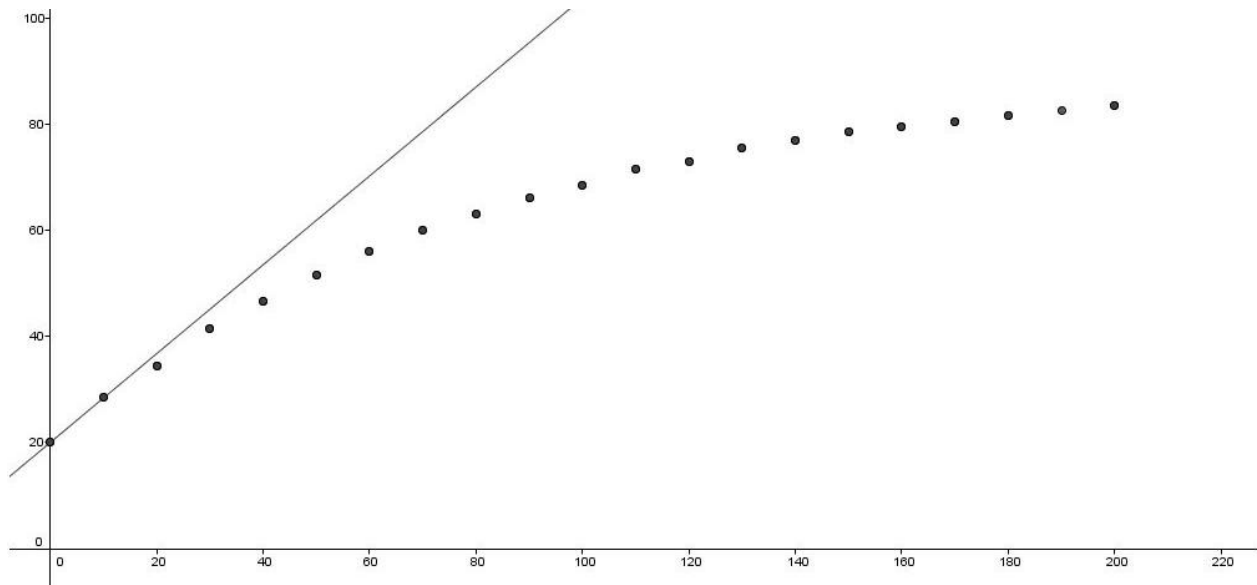
Fügt man noch die Ausgangstemperatur hinzu, ergibt sich als theoretische lineare Temperaturfunktion (t in s und T in K):

$$T(t) = \frac{P}{c * m} * t + t_0$$

da man für die Umrechnung in Celsius nur 273.15K abziehen muss, kann man die Differenz direkt als Konstante definieren und erhält (t in s und T in °C):

$$T(t) = \frac{P}{c * m} * t + t_{c0}$$

mit $P=350\text{W}$, $m \approx 0,1\text{kg}$, $t_{c0}=20$ und $c \approx 4182 \frac{\text{J}}{\text{kg} * \text{K}}$ ergibt sich folgender Graph im Vergleich zu den Messwerten:



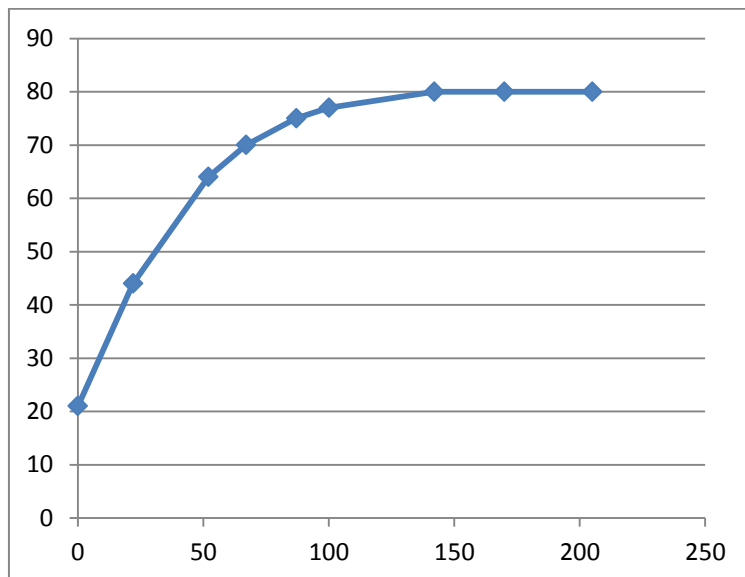
Es ist eindeutig ersichtlich, dass der Graph zwar relativ genau durch die ersten beiden Punkte läuft, jedoch auf Grund seiner Linearität immer mehr von der Kurve abweicht. Wichtige Frage ist nun: Was könnte ausschlaggebend sein den theoretisch linearen Graphen auf einen Verlauf durch die Messpunkte zu „zwängen“.

Was wurde vernachlässigt?

Vernachlässigt wurde, dass das System, welches sich erhitzt selber Leistung in Form von Wärmestrahlung abstrahlt oder durch Wärmekonvektion verliert. Denn wenn sich jedes System linear erhitzen würde, so würde beispielsweise eine CPU auf Dauer überhitzen, die Kühler jedoch nutzen Wärmekonvektion und Wärmeleitungseffekte aus und sorgen dafür, dass bei einer bestimmten Temperatur genau so viel Wärmeleistung abgeführt wird, wie zugeführt wird. An diese Temperatur wird sich die Temperatur des

Systems asymptotisch anschmiegen. Was das genau bedeutet, kann man sich an einem einfachen Experiment veranschaulichen (Abbildungen des Aufbaus im Anhang):

Es wird ein flächengroßer am besten matt schwarz gefärbter, hitzeresistenter Flüssigkeitsbehälter benutzt, da ein möglichst hoher Leistungsverlust an die Umgebung erzeugt werden soll. In unserem Beispiel wird hierfür eine Pfanne vom Durchmesser 30cm und einer Höhe von 5,5cm verwendet. Anschließend gibt man eine vergleichsweise größere Menge Wasser in dieses Gefäß. In unserem Beispiel 800 ml. Die Nadel eines Temperaturmessgerätes (in diesem Fall ein CIE TM-307 Dual Thermometer) wird in die Flüssigkeit gelegt. Damit das Wasser in dem System bleibt, überdeckt man das Gefäß mit einer Abdeckung (Glasabdeckung damit genügend Leistung abgegeben wird). Das ganze wird auf eine Standard-elektroherdplatte gestellt. Zum Erhitzen benutzt man die erste Leistungsstufe, so dass die zugefügte Effektivleistung unter 100 Watt ist (In unserem Fall ca.55W). Nebenher lässt man einen Timer laufen. Nun notiert man ca. alle 15-30 Minuten die vergangene Zeit mit der gemessenen Temperatur und überträgt alle Werte in ein Zeit-Temperaturdiagramm. In diesem Fall ergibt sich folgendes Ergebnis(Zeit in Minuten, Temperatur in °C):

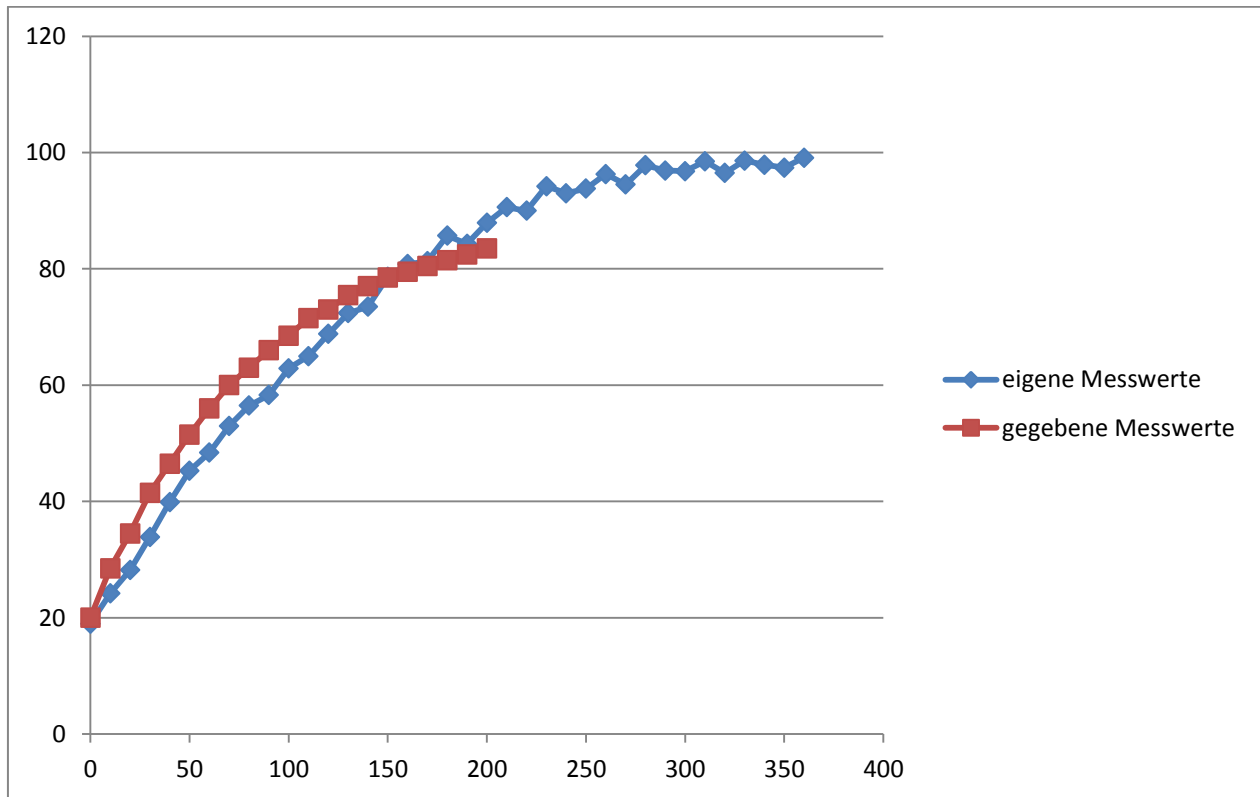


Zeit in Min	Temp. in °C
0	21
22	44
52	64
67	70
87	75
100	77
142	80
170	80
205	80

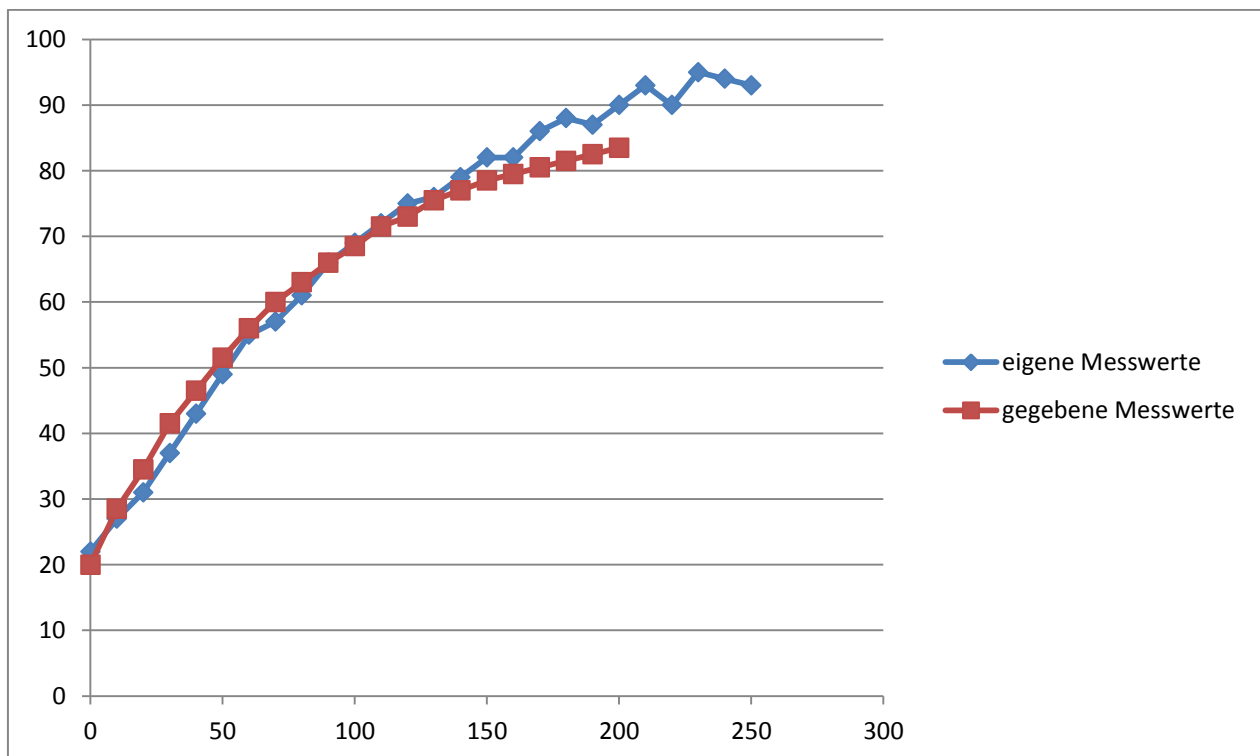
Die Annäherung an 80°C und die Ähnlichkeit in der Form ist unverkennbar. In dem gegebenen Experiment sind allerdings 100ml und 350Watt im Einsatz. Würde man das Experiment genauso mit diesen Modifizierungen durchführen, so würde das Wasser 90 °C überschreiten und von den gegebenen Messwerten deutlich abweichen. Um dem entgegen zu wirken, kann man den Leistungsverlust durch Wärmekonvektionsverstärkung erhöhen. Dies kann man zum Beispiel durch Ventilatoren die auf das Wasser gerichtet sind realisieren.

Führt man dieses Experiment wie oben beschrieben mit den gegebenen Werten durch, ergibt sich eine Messreihe, die schon eher zu der gegebenen passt:

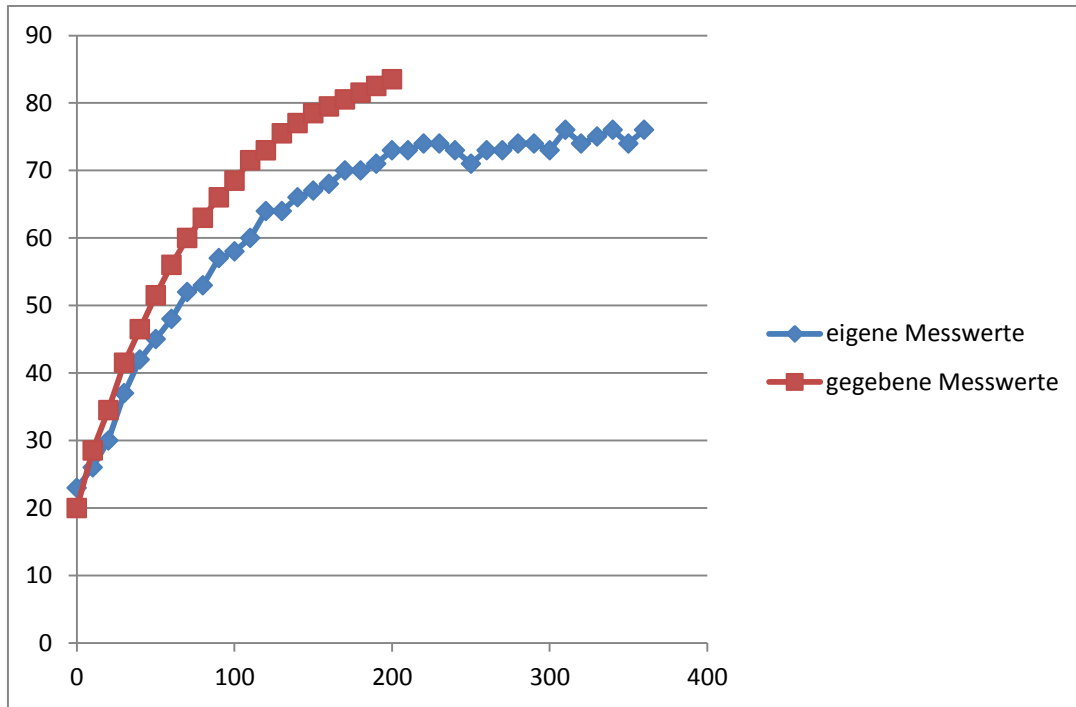
1.(x: Zeit in s, y:°C : Messreihe mit Glasdeckel, 100ml Wasser ca. 350W, durch 2 Ventilatoren gekühlt)



2.(x: Zeit in s, y:°C : Messreihe ohne Glasdeckel, 100ml Wasser ca. 350W, vergleichsweise schwach durch 1 Ventilator gekühlt)



3.(x: Zeit in s, y:°C : Messreihe ohne Glasdeckel, 100ml Wasser ca. 350W, vergleichsweise stark durch 2 Ventilatoren gekühlt)



Besonders die Betrachtung der 2. Messreihe aber auch der Verlauf der 1. Und 3. lässt eine Übereinstimmung des Experimentes mit den gegebenen Werten erahnen.

Wie kann man diese erzwungene Wärme Konvektion mathematisch beschreiben?

Wir wissen (siehe oben):

$$P = \frac{c * m * \Delta T}{t}$$

und

$$P = \frac{Q}{t}$$

bzw. da nun Funktionen betrachtet werden:

$$P = \frac{dQ}{dt} \text{ bzw. } Q = \int P dt$$

Um eine Temperatur konstant zu halten, müssen sich aufgenommene und abgegebene Leistung aufheben. Die aufgenommene Leistung ist hierbei an sich negativ. Also gilt:

$$P_A + P_B = 0$$

$$\text{bzw. } P_A = -P_B$$

daraus folgt:

$$Q_A = -Q_B$$

mit $Q_A = c * m * \Delta T$ und $Q_B = \int_{t_1}^{t_2} P dt$:

$$c * m * \Delta T = - \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

für die übertragene Wärmemenge gilt (h : Wärmeübergangskoeffizient, A : Verbindungsfläche der Systeme, ΔT_S : Temperaturunterschied der Systeme):

$$Q = h * A * \Delta T_S * \Delta t$$

bzw.:

$$Q = \int h * A * \Delta T_S dt$$

$$\Rightarrow P = h * A * \Delta T_S$$

mit

$$c * m * \Delta T = - \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

$$c * m * \Delta T = - \int_{t_1}^{t_2} h * A * \Delta T_S dt$$

Wenn man von einer konstanten Umgebungstemperatur ausgeht, aber einer variablen „Systemtemperatur“ kann man das ganze so schreiben:

$$c * m * \Delta T = - \int_{t_1}^{t_2} h * A * (T(t) - T_u) dt$$

betrachtet man t_2 als variabel so liegt eine Integralfunktion vor, die sich leicht nach t_2 ableiten lässt, da t_1 nur eine Verschiebung nach oben oder unten verursacht:

$$\frac{d c * m * \Delta T}{dt_2} = -h * A * (T(t_2) - T_u)$$

Mit $\Delta T = T(t_2) - T(t_1)$ ergibt sich:

$$\frac{d c * m * (T(t_2) - T(t_1))}{dt_2} = -h * A * (T(t_2) - T_u)$$

daraus folgt:

$$\frac{d c * m * T(t_2) - c * m * T(t_1)}{dt_2} = -h * A * (T(t_2) - T_u)$$

mit

$$t_2 := t$$

$$c * m * \dot{T} = -h * A * (T - T_u)$$

$$-\frac{c * m}{h * A} * \dot{T} = T - T_u$$

$$T + \frac{c * m}{h * A} * \dot{T} = T_u$$

$$\frac{c * m}{h * A} := \zeta$$

$$T + \zeta * \dot{T} = T_u$$

$$\dot{T} + \zeta * \ddot{T} = 0$$

$$\dot{T} = -\zeta * \ddot{T}$$

$$-\frac{1}{\zeta} = \frac{\ddot{T}}{\dot{T}}$$

$$-\int \frac{1}{\zeta} dt = \int \frac{\ddot{T}}{\dot{T}} dt$$

Substitution:

$$\dot{T} := u$$

$$\frac{du}{dt} = \ddot{T} \Rightarrow \frac{du}{\dot{T}} = dt$$

mit:

$$\int \frac{\ddot{T}}{\dot{T}} dt = \int \frac{\ddot{T}}{u} * \frac{du}{\dot{T}} = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| = \ln|\dot{T}| = -\int \frac{1}{\zeta} dt = -\frac{1}{\zeta} * t + C$$

$$\ln|\dot{T}| = -\frac{1}{\zeta} * t + C$$

$$\dot{T} = e^{-\frac{1}{\zeta} * t + C} = e^C * e^{-\frac{1}{\zeta} * t}$$

mit $e^C := C_0$

$$\dot{T} = C_0 * e^{-\frac{1}{\zeta} * t}$$

$$T = \int C_0 * e^{-\frac{1}{\zeta} * t} dt$$

$$T = -C_0 * \zeta * e^{-\frac{1}{\zeta} * t} + C_1$$

$C_1 := T_M$: Maximaltemperatur

aus $P = \frac{c * m * \Delta T}{t}$ wissen wir:

$$P = c * m * T'(0)$$

$$T'(0) = C_0 * e^{-\frac{1}{\zeta} * 0} = C_0$$

$$P = c * m * C_0$$

$$C_0 = \frac{P}{c * m}$$

$$T = -\frac{P}{c * m} * \zeta * e^{-\frac{1}{\zeta} * t} + T_M$$

$$T = -\frac{P}{c * m} * \frac{c * m}{h * A} * e^{-\frac{1}{\zeta} * t} + T_M$$

$$T = -\frac{P}{h * A} * e^{-\frac{1}{\zeta} * t} + T_M$$

h und A kennen wir nicht und wir definieren deshalb:

$$k := h * A$$

$$T(t) = -\frac{P}{k} * e^{-\frac{k}{c * m} * t} + T_M$$

Wir kennen:

$$P = 350W$$

$$c \approx 4182 \frac{J}{kg * K}$$

$$m \approx 100g$$

$$T_M \approx 363.15$$

$$T(0) = 293.15K$$

Wir wissen:

$$T(0) = -\frac{P}{k} + T_M$$

$$k = -\frac{P}{T(0) - T_M}$$

$$k \approx 5 \frac{J}{s * K}$$

alle Werte einsetzen in:

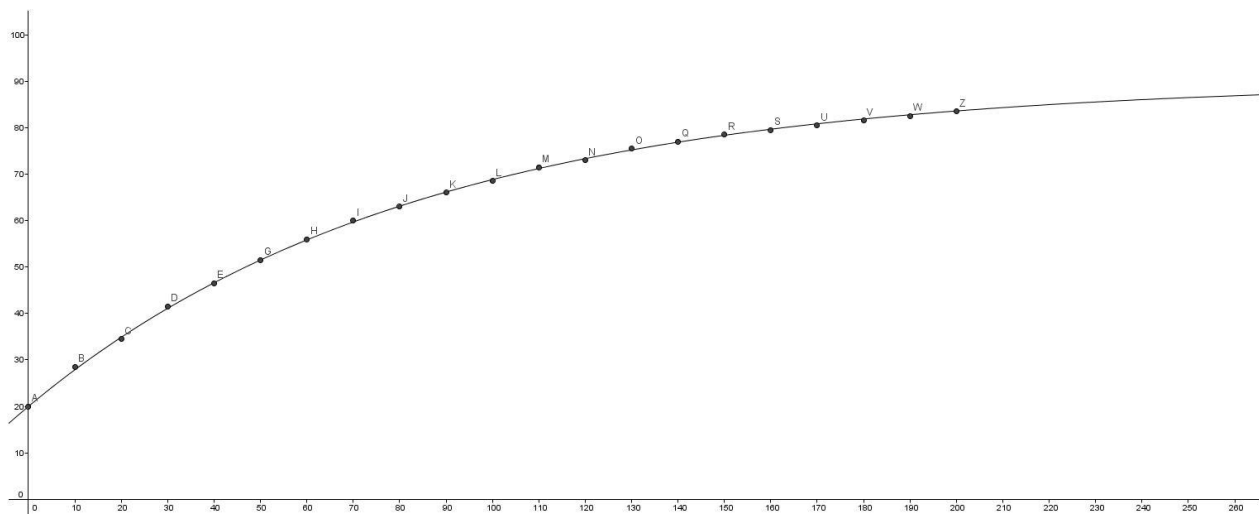
$$T(t) = -\frac{P}{k} * e^{-\frac{k}{c*m}*t} + T_M$$

bzw. mit $k = -\frac{P}{T(0)-T_M}$

$$T(t) = -\frac{P}{\frac{-P}{T(0)-T_M}} * e^{-\frac{\frac{P}{T(0)-T_M}}{c*m}*t} + T_M$$

$$T(t) = (T(0) - T_M) * e^{\frac{P}{c*m(T(0)-T_M)}*t} + T_M$$

ergibt im direkten Vergleich zu den vorgegebenen Messwerten:



Das Ergebnis spricht für sich: Die berechnete Kurve passt sehr gut zu den Messwerten.

Zum einen belegt die Rechnung, dass die Kurve theoretisch zu den Messwerten gehören kann, auch wenn immer noch nicht alle (in der Regel aber vernachlässigbaren) Eventualitäten, wie z.B. die Leistung der Wärmestrahlung, mit einbezogen wurden. Dass dies aber auch praktisch möglich ist, belegt das Experiment. Die Messwerte sind zwar experimentell nicht immer perfekt getroffen geben aber zumindest von der Form her den selben Verlauf wieder. Auch das asymptotische Verhalten spiegelt sich in den eigenen Messwerten wieder. All dies macht es sehr wahrscheinlich, dass dieses Experiment das Gesuchte ist.

Vergleicht man nun alle Experimente zusammenfassend miteinander so kommt man zu folgendem Schluss:

Experiment zwei kann auf Grund der Nichtübereinstimmung der Halbwertszeiten nicht das gesuchte Experiment sein.

In Experiment eins könnte der Flummi theoretisch solchen äußeren Einflüssen ausgesetzt sein, dass der Höhenverlauf zu den Messwerten passt. Diese Eventualität ist allerdings extrem unwahrscheinlich da die „natürliche“ Flugbahn(nur mit Berücksichtigung der Fallbeschleunigung) zu sehr von den gegebenen Messwerten abweicht. Die wirkenden Kräfte wären vergleichsweise enorm und könnten auch nur schwer durch den Magnus-Effekt umgesetzt werden, da bei dem vorhergehenden Aufprall eine eventuelle Rotation erheblich wegen dem Gummimaterial gedämpft würde. Dieses Experiment kann also auch nicht das gesuchte sein.

Letztlich bleibt das Temperaturexperiment übrig. Sowohl rechnerisch als auch experimentell konnte eine relativ genaue Übereinstimmung festgestellt werden. Insofern muss das Wassererwärmungsexperiment also Experiment Nr.3 dem Graphen mit den Messwerten zugehörig sein.

Damit ist das gesuchte Experiment das Experiment Nr.3.

Nr.4

Plan:

Um eine gute Schätzung erreichen zu können betrachten wir die Erde als ein thermodynamisches System, das zum einen Wärmestrahlungsleistung von der Sonne empfängt und zum anderen Wärmestrahlungsleistung abgibt. Damit sich eine konstante Temperatur einstellt muss genauso viel Wärmestrahlung empfangen wie ausgesendet werden. Die Leistungen die mit dem typischen Stefan-Boltzmann-Gesetz beschrieben werden müssen also gleichgesetzt werden. Zuvor muss das Problem allerdings geometrisch betrachtet werden um die Ausdünnung der Strahlungsleistung der Sonne bis zur Erde berechnen zu können.

Rechnung:

gegeben:

gegen Ende ihrer Phase als Hauptreihenstern gilt:

$$r = 1,6 * R_S$$

$$T = 0,96T_S$$

beim jetzigen Entwicklungsstand stellt sich eine Temperatur von $T_0 = 246K$

andere Konstanten (Literaturwerte):

Stefan-Boltzmann-Konstante $\sigma \approx 5,67 * 10^{-8} \frac{W}{m^2 * K^4}$

mittlerer Erdradius $R_E \approx 6371000m$

mittlerer Sonnenradius $R_S \approx 6,96342 * 10^8m$

mittlerer Abstand Erde Sonne $D \approx 1,496 * 10^{11}m$

mittlere Temperatur der Sonne $T_S \approx 5778K$

mittlere Temperatur der Erde $T_E \approx 288.15K$

mittlerer Albedo-Wert oder Reflexionsgrad der Erde: $\rho \approx 0,306$

mittlerer Emissionsgrad der Erde: ϵ (unbekannt)

Hinweis:

näherungsweise kann man ϵ als $1 - \rho$ annehmen, da das Kirchhoffsche Strahlungsgesetz gilt. Es besagt zusammengefasst, dass die entgegengenommene Strahlung genauso groß ist wie die ausgesendete. (Je größer der Absorptionsvermögen, desto größer die Strahlungsleistung der Temperaturstrahlung.)

Die Strahlungsintensität nimmt mit zunehmender Entfernung zur Sonne radialsymmetrisch ab, die abgestrahlte Leistung verteilt sich also mit zunehmender Distanz auf eine immer größere Fläche.

Nach der Formel der Kugeloberfläche gilt:

$$A = 4\pi r^2$$

Für die Oberfläche der Sonne gilt also:

$$A_S = 4\pi R_S^2$$

Die Strahlungsleistung, die die Erde erreicht wird um einen gewissen Faktor kleiner sein als die gesamte Strahlungsleistung. Um diesen Faktor zu berechnen braucht man zusätzlich noch die Oberfläche der theoretischen Kugel, deren Radius der Strecke vom Sonnenmittelpunkt bis zur Erdumlaufbahn entspricht.

Also:

$$A_D = 4\pi(R_S + D)^2$$

den beschriebenen Faktor erhält man durch Teilen der Sonnenoberfläche durch die Oberfläche der theoretischen Kugel:

$$C = \frac{A_S}{A_D}$$

nun wird die Strahlungsleistung mit ins Spiel gebracht, und das Stefan-Boltzmann-Gesetz wird benötigt:

$$P = \sigma * A * T^4 \text{ (für den idealisierten schwarzen Körper)}$$

bzw.

$$P = \sigma * A * T^4 * \epsilon \text{ (auch für nicht schwarze Körper)}$$

die Erde nimmt zum einen Leistung auf, zum anderen gibt sie Leistung ab. Die beiden Formeln ergeben sich aus den beschriebenen Gleichungen:

für die Leistungsaufnahme der Erde P_S (von der Sonne) gilt:

$$P_S = \sigma * A_{KE} * T_S^4 * \epsilon * C$$

wobei C der oben beschriebene „Abschwächungsfaktor“ ist und A_{KE} in diesem Fall die Fläche eines Kreises mit Erdradius sein muss, da nur eine Seite der Erde bestrahlt wird, und schräge Einfallswinkel, von der Erde aus betrachtet, punktuell eine geringere Strahlenintensität verursachen („das „ganze“ also relativieren → es wird also nicht die Kugeloberfläche der Erde benutzt).

Für die Leistungsabgabe P_E (von der Erde) gilt:

$$P_E = \sigma * A_E * T_E^4 * \epsilon$$

wobei A_E die Größe der Oberfläche der Erde ist, da in diesem Fall Wärmestrahlung in alle Richtungen abgestrahlt wird.

Damit sich nun eine konstante Temperatur ergeben kann, muss genauso viel Leistung aufgenommen wie abgegeben werden. P_S muss also mit P_E geschnitten werden.

$$\sigma * A_{KE} * T_S^4 * \epsilon * C = \sigma * A_E * T_E^4 * \epsilon$$

$$\Rightarrow T_E = \sqrt[4]{\frac{A_{KE} * T_S^4 * C}{A_E}}$$

$$T_E = \sqrt[4]{\frac{A_{KE} * T_S^4 * C}{A_E}}$$

mit:

$$C = \frac{A_S}{A_D} = \frac{4\pi R_S^2}{4\pi(R_S + D)^2}$$

$$A_{KE} = \pi R_E^2$$

$$A_E = 4\pi R_E^2$$

ergibt sich:

$$T_E = \sqrt[4]{\frac{\pi R_E^2 * T_S^4 * \frac{4\pi R_S^2}{4\pi(R_S + D)^2}}{4\pi R_E^2}}$$

$$T_E = \sqrt[4]{\frac{T_S^4 * \frac{R_S^2}{(R_S + D)^2}}{4}}$$

$$T_E = T_S * \sqrt[4]{\frac{R_S^2}{4 * (R_S + D)^2}}$$

letztendlich gilt:

$$T_E \approx T_S * \sqrt[4]{\frac{R_S^2}{4 * (R_S + D)^2}}$$

nach Einsetzen der Werte ergibt sich:

$$T_E \approx 278,0991K$$

Dies entspricht ca. 4,9491°C und ist eine gute Näherung für die durchschnittliche Temperatur auf der Erde ohne Berücksichtigung des Treibhauseffektes und unter der Annahme der idealisierten Kugelform der Himmelskörper, so wie des idealisierten Emissionsgrades und Reflexionsgrades.

Die tatsächliche Durchschnittstemperatur beträgt: $T_E \approx 288.15K = 15^\circ C$

Die Schätzung zur heutigen Temperatur liegt also ca. 10°C unter dem tatsächlichen Wert.

Betrachtung der mittleren Erdtemperatur zum Ende der Hauptreihenstern-Phase der Sonne.

Wir wissen:

heute gilt:

$$T_E \approx T_S * \sqrt[4]{\frac{R_S^2}{4 * (R_S + D)^2}}$$

es wird gelten:

zukünftiger Radius der Sonne $r = 1,6 * R_S$

zukünftige Temperatur der Sonne $T = 0,96T_S$

daher wird gelten:

$$T_{E'} \approx T * \sqrt[4]{\frac{r^2}{4 * (R_S + D)^2}}$$

$(R_S + D)^2$ kann stehen bleiben, da in der Aufgabe angenommen werden soll, dass der Bahnradius konstant bleibt. Das hat auch zur Folge, dass die oben angenommene „theoretische Kugel“ von Sonnenmittelpunkt zur Umlaufbahn der Erde sich nicht verändert. Daher kann man an dieser Stelle auch heutige Werte verwenden.

Nach Einsetzen oberer Formeln ergibt sich:

$$T_{E'} \approx 0,96 * T_S * \sqrt[4]{\frac{(1,6 * R_S)^2}{4 * (R_S + D)^2}}$$

nach Einsetzen der Werte ergibt sich:

$$T_{E'} \approx 337,6998K$$

dies entspricht ca. 64,5498°C. Die Schätzungen liegen also ca. 60°C auseinander.

Das Ergebnis zeigt eindeutig die gewaltigen Probleme auf, die sich dem Leben in aus unserer Sicht ferner Zukunft stellen werden. Denn die kritische Grenze für höher entwickeltes Leben, wie wir es kennen, setzt man heute bei einer Durchschnittstemperatur von ca. 35°C. Außerdem muss man bedenken, dass die errechneten 64,5498°C evtl. noch durch Treibhauseffekte erhöht sein werden. Leben in dem Umfang, wie wir es heute kennen, wird es also höchstwahrscheinlich nicht mehr geben. Es wird nur sehr wenige Plätze mit lebensfähiger Temperatur geben, aber selbst an diesen Plätzen ist das Leben schwer. Denn die erhöhte Verdunstungsrate wird zum Austrocknen der Ozeane führen. Kleinere robustere Tierchen (z.B. das Bärtierchen) könnten aber theoretisch noch längere Zeit auf der Erde aushalten, aber selbst das Bärtierchen, dass von - 273,15°C bis 100°C jede Temperatur aushält wird mit hohen Temperaturschwankungen zwischen Tag und Nacht, die 100°C übersteigen, früher oder später Probleme haben.

Das Fazit ist also: Die Erde wird auf Dauer kein Leben mehr beherbergen können.

Anhang:

Versuchsaufbau:

