

GYMNASIUM LAURENTIANUM WARENDORF



Internationale Physik Olympiade 2015

Indien

Benedikt Buller

27.10.2014

Eine Auseinandersetzung mit den Aufgaben der 2. Runde der Auswahlrunde zur Physik Olympiade 2015, die vom normalen Unterricht unabhängig verfasst wurde.

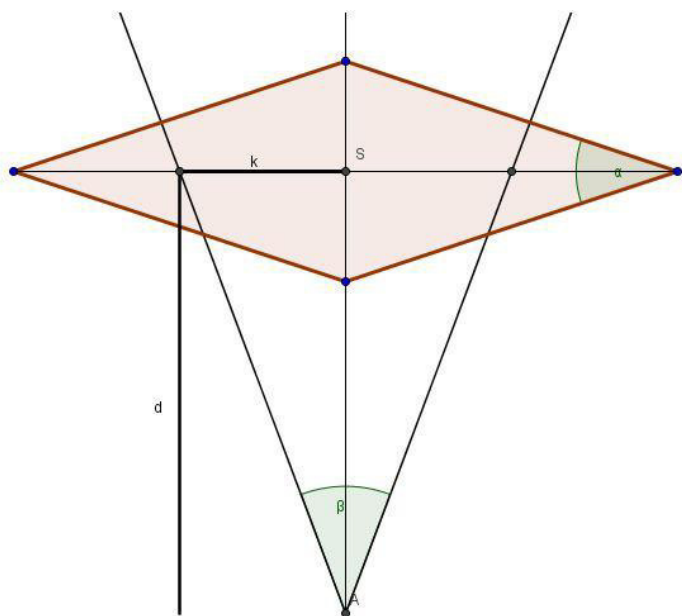
Aufgabe 1

Nr. 1a)

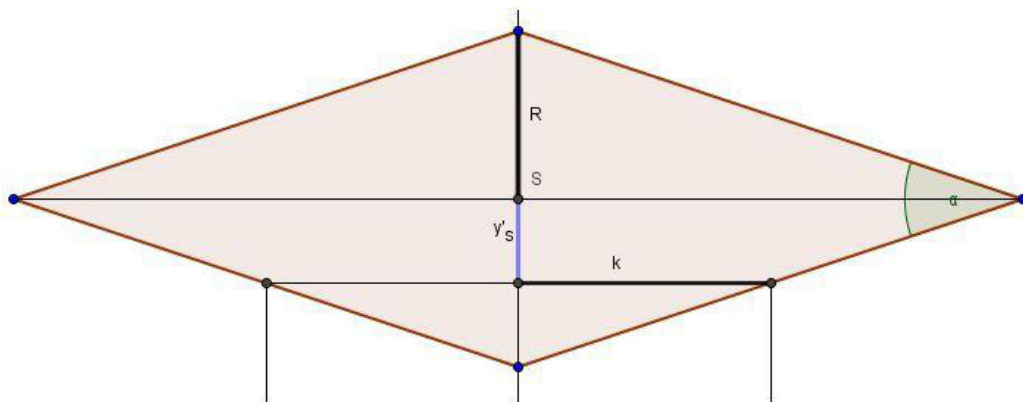
Der Doppelkegel rollt scheinbar bergauf, weil sich durch die Rollbewegung sein Schwerpunkt auf eine geringere Höhe absinkt also in eine energetisch günstigere Position. Das dies bei dem vorliegenden Experiment unter bestimmten Umständen möglich ist, lässt sich am besten mathematisch zeigen:

Zur mathematischen Beschreibung geht man von zwei Bezugssystemen aus, die durch Rotationsmatrizen ineinander umgewandelt werden können. Zum einen wählt man ein Bezugssystem, in dem die Schienenebene in der $x_1 x_2$ Ebene liegt (wobei im Folgenden zunächst eine 2 dimensionale Betrachtung des Schwerpunktes genügt), zum anderen eines, das der Betrachter von außen sehen würde (Der Punkt an dem die Schienen zusammentreffen liegt bei den Betrachtungen immer im Ursprung der Koordinatensysteme):

Betrachtung von oben auf Schienenebene (Schwerpunkt:S) Abb1 :



Betrachtung von vorne (Schienenebene) Abb2:



Aus Abb1 geht hervor:

$$\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) = \frac{k}{d}$$

Wobei im Folgenden der Übersichtlichkeit in den Koordinatensystemen wegen d mit x'_S substituiert wird:

$$1. \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) = \frac{k}{x'_S}$$

Aus Abb2 geht hervor:

$$2. \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{R - y'_S}{k}$$

Aus 1. Folgt:

$$k = \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * x'_S$$

Aus 2. Folgt:

$$y'_S = R - \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * k$$

Wenn man k nun in y'_S einsetzt:

$$y'_S = R - \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * x'_S$$

Man hat also nun eine Parameterdarstellung des Schwerpunktes im gestrichenen Koordinatensystem, in dem von der aufgespannten Ebene als Grundfläche ausgegangen wird, und der Ursprung im Schnittpunkt der Geraden liegt. Geometrisch ergibt sich also für den Ortsvektor zum Schwerpunkt S' im gestrichenen System:

$$\vec{S'} = \begin{pmatrix} R - \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * x'_S \\ x'_S \end{pmatrix}$$

Um die Koordinaten im ungestrichenen Koordinatensystem zu erhalten muss eine Drehung des Koordinatensystems um den Winkel γ erfolgen. Dies kann man mit der passiven (2D-)Drehmatrix realisieren, also der transponierten aktiven Drehmatrix also:

$$D = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich:

$$D * \vec{S}' = \vec{S}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} R - \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * x'_S \\ x'_S \end{pmatrix} = \vec{S}$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) * \left(R - \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * x'_S\right) + \sin(\gamma) * x'_S \\ -\sin(\gamma) * \left(R - \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * x'_S\right) + \cos(\gamma) * x'_S \end{pmatrix}$$

y-Komponente vereinfachen(umformen):

$$y_S = \cos(\gamma) * R - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * x'_S + \sin(\gamma) * x'_S$$

x'_S ausklammern:

$$y_S = x'_S \left(\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) \right) + \cos(\gamma) * R$$

Wenn $\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) < 0$ wird für steigende x'_S offensichtlich y_S ebenfalls kleiner. Das bedeutet: für eine zunehmende Strecke, die in der aufgespannten Ebene zurückgelegt wird, erfolgt eine Absenkung des Schwerpunktes, was für das scheinbare Hinaufrollen verantwortlich ist. Die Bedingung, die die Winkel erfüllen müssen, ist also:

$$\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) < 0$$

$$\frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)} < \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)$$

$$\tan(\gamma) < \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)$$

$\tan(\gamma) < \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)$ ist also die gesuchte Bedingung. Noch offensichtlicher wird es, wenn man die Geradengleichung auf der sich der Schwerpunkt bewegt herleitet (siehe c) und schaut wann die Steigung größer kleiner null ist. Also $\frac{\left(\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right)}{\sin(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) + \cos(\gamma)} < 0$ und damit $\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) < 0$

Nr.1 b)

$$I = \int r^2 dm$$

Mit:

$$dm = dV * \rho \quad \rho = \text{const}$$

$$I = \rho \int r^2 dV$$

bzw:

$$I = \rho \iiint_V r^2 dx dy dz$$

In Zylinderkoordinaten:

Mit $dV = \int_0^r 1 d\lambda * d\varphi * dr * dx$ (das $\int_0^r 1 d\lambda$ wird zwecks Übersichtlichkeit verwendet um zu zeigen, was mit dem r^2 in dem Dreifachintegral passiert) kommt man zur Formel für den rotationssymmetrischen Doppelkegel mit konstanter Dichte und mit $r(x) = \frac{r}{h}x$ als Randfunktion und dem Faktor 2, weil es sich nicht um einen normalen Kegel handelt, sondern um einen Doppelkegel (wegen der Linearität des Integrals ohne Probleme möglich):

$$I = 2 * \rho \int_0^h \int_0^{\frac{r}{h}x} \int_0^{2\pi} \int_0^r r^2 d\lambda d\varphi dr dx$$

$$I = 2 * \rho \int_0^h \int_0^{\frac{r}{h}x} \int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dr dx$$

$$I = 2 * \rho \int_0^h \int_0^{\frac{r}{h}x} 2\pi r^3 dr dx$$

$$I = 2 * \rho \int_0^h \frac{1}{4} * 2\pi * \left(\frac{r}{h}x\right)^4 dx$$

$$I = 2 * \frac{1}{2} * \rho * \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^4 dx$$

$$I = 2 * \frac{1}{2} * \rho * \pi * \left(\frac{r}{h}\right)^4 * \frac{1}{5} h^5$$

Mit $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} * \frac{3}{2}$

$$I = 2 * \frac{1}{3} * \frac{3}{2} * \rho * \pi * r^4 * \frac{1}{5} h$$

$$I = 2 * \rho * \frac{1}{3} \pi * h * r^2 * \frac{3}{2} * r^2 * \frac{1}{5}$$

Mit $m = 2 * \rho * \frac{1}{3} \pi * h * r^2$

Da $m = \rho * V$ und $V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x\right)^2 dx = \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 * \frac{1}{3} h^3 = \frac{1}{3} \pi * h * r^2$ (den Faktor 2 braucht man, weil es sich um einen Doppelkegel handelt)

$$I = m * \frac{3}{2} * r^2 * \frac{1}{5}$$

$$I = \frac{3}{10} * m * r^2$$

Was zu zeigen war.

Hinweis:

Hält man die Randfunktion $r(x)$ allgemein, ergibt sich eine allgemeine Formel für das Trägheitsmoment von Rotationskörpern:

$$I = \varrho \int_{x_2}^{x_1} \int_0^{r(x)} \int_0^{2\pi} \int_0^r r^2 d\lambda d\varphi dr dx$$

$$I = \varrho \int_{x_2}^{x_1} \int_0^{r(x)} \int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dr dx$$

$$I = \varrho \int_{x_2}^{x_1} \int_0^{r(x)} 2\pi r^3 dr dx$$

$$I = \varrho \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{4} * 2\pi * r(x)^4 dx$$

$$I = \frac{1}{2} * \varrho * \pi \int_{x_2}^{x_1} r(x)^4 dx$$

Den Gedanken aus a) kann man weiterführen und mit b) verknüpfen:

Vektor S war:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) * \left(R - \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * x'_S \right) + \sin(\gamma) * x'_S \\ -\sin(\gamma) * \left(R - \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * x'_S \right) + \cos(\gamma) * x'_S \end{pmatrix}$$

y_S umgeformt:

$$y_S = x'_S \left(\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) \right) + \cos(\gamma) * R$$

x_S umgeformt nach x'_S :

$$x_S = -\sin(\gamma) * \left(R - \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * x'_S \right) + \cos(\gamma) * x'_S$$

$$x_S = -\sin(\gamma) * R + \sin(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * x'_S + \cos(\gamma) * x'_S$$

$$x_S = x'_S \left(\sin(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) + \cos(\gamma) \right) - \sin(\gamma) * R$$

$$x'_S = \frac{x_S + \sin(\gamma) * R}{\sin(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) + \cos(\gamma)}$$

Einsetzen in y_S und man hat die Funktionsgleichung der Bahn, auf der sich der Schwerpunkt bewegt, errechnet:

$$y_S(x_S) = \frac{x_S + \sin(\gamma) * R}{\sin(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) + \cos(\gamma)} * \left(\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) \right) + \cos(\gamma) * R$$

Das Ganze wird offensichtlich eine ganzrationale Funktion 1. Grades sein. Um die Gleichung ein bisschen handlicher zu machen konstruiert man sie mit Hilfe eines Punktes und der Steigung neu:

$$P(-\sin(\gamma) * R; \cos(\gamma) * R) \text{ Steigung } L = \frac{(\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right))}{\sin(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) + \cos(\gamma)}$$

$$y_S(x_S) = \frac{(\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right))}{\sin(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) + \cos(\gamma)} x_S + C$$

$$\cos(\gamma) * R = \frac{(\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right))}{\sin(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) + \cos(\gamma)} * (-\sin(\gamma)) * R + C$$

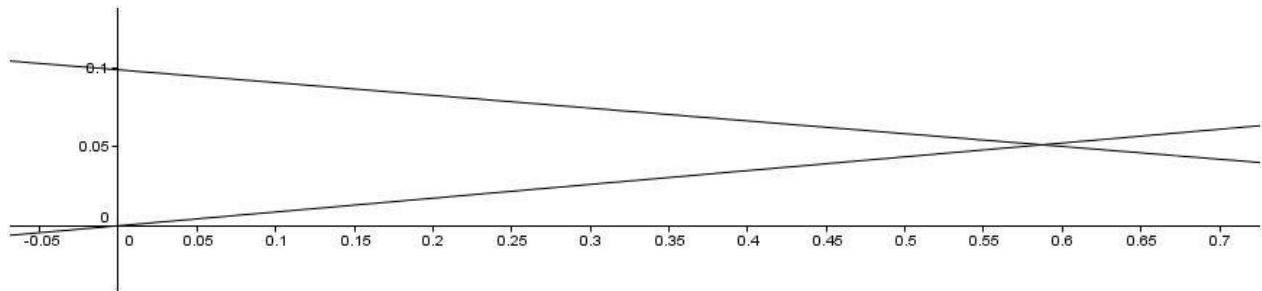
$$C = R \left(\cos(\gamma) + \sin(\gamma) * \frac{(\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right))}{\sin(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) + \cos(\gamma)} \right)$$

$$y_S(x_S) = \frac{(\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right))}{\sin(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) + \cos(\gamma)} x_S + R \left(\cos(\gamma) + \sin(\gamma) * \frac{(\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right))}{\sin(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) + \cos(\gamma)} \right)$$

Für $\frac{(\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right))}{\sin(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) + \cos(\gamma)}$ wird im Folgenden L benutzt:

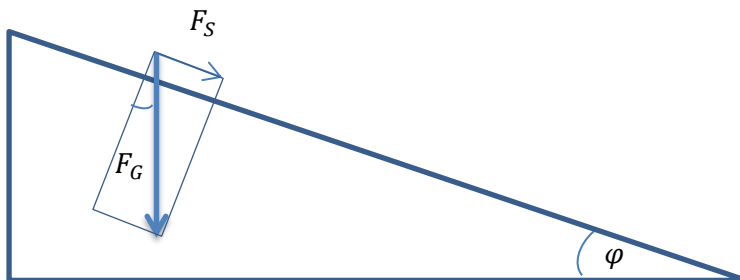
$$y_S(x_S) = L * x_S + R(\cos(\gamma) + \sin(\gamma) * L)$$

Für die unten angegebenen Werte sieht die Bahn des Schwerpunktes von der Seite daher so aus. Die Linie durch den Ursprung ist die Schienenebene von der Seite aus betrachtet. Die Angaben sind in m:



Auf den Doppelkegel wirkt eine Kraft, die sich über die Steigung L von der Bahn des Schwerpunktes und über F_g bestimmen lässt:

Abb3



$$\tan(\varphi) = -L$$

$$\varphi = \arctan(-L)$$

Aus Abb3 folgt:

$$\sin(\varphi) = \frac{F_S}{F_G}$$

$$F_S = \sin(\varphi) * F_G$$

Ersetzen von φ und F_G :

$$F_S = \sin(\arctan(-L)) * m * g$$

Diese Kraft setzt je nachdem, wo sich der Doppelkegel befindet, auf Grund des variablen Abstandes von der Rotationsachse zu den Auflagepunkten an verschiedenen langen Hebeln an, also an den genauen Auflagepunkten. Dieser Abstand ist y'_S (siehe Abb2).

Die Winkelbeschleunigung a_δ ergibt sich aus dem Drehmoment M und dem Trägheitsmoment I :

$$a_\delta = \frac{M}{I}$$

Mit $M = r * F_S$ und $r = y'_S$

$$a_\delta = \frac{y'_S * F_S}{I}$$

$$a_\delta = \frac{10 * y'_S * F_S}{3 * m * R^2}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich durch Integrieren der Winkelbeschleunigung nach der Zeit:

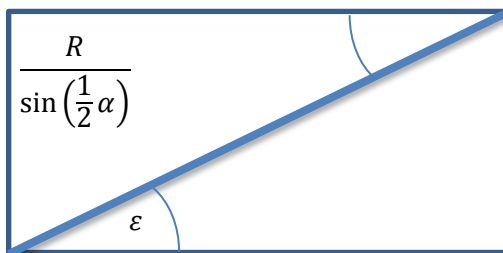
$$\omega(t) = \int a_\delta dt = \int \frac{10 * y'_S * F_S}{3 * m * R^2} dt = \frac{10 * y'_S * F_S}{3 * m * R^2} t + \omega_0$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich aus:

$$v(t) = \omega(t) * r(t)$$

Um an $r(t)$ zu kommen benötigt man zunächst $r(\delta)$ (δ :gerollter Winkel).

Um dies zu erreichen kann man die Länge der Spirale, die von den Schienen auf den Doppelkegeln gezeichnet würde, ansehen als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, bei dem eine Kathete durch die Länge von der Kante Doppelkegels bis zur Spitze des Kegels gegeben ist und dieser Seite ein Winkel ε gegenüber liegt, der von α und β abhängt:



Man konstruiert diesen Winkel wie folgt:

Bei Betrachtung der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}_{x2} = \begin{pmatrix} -1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fordern wir also mit der allgemeinen Formel: $\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\beta\right) = \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\beta\right)^2} - 1}$$

Äquivalent für den anderen Vektor:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{d}_{x2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{x_3^2 + 1}}$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2} - 1}$$

$$\vec{b}_{x2} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\beta\right)^2} - 1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_{x3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2} - 1} \end{pmatrix}$$

Für den Winkel zwischen den Vektoren gilt also:

$$\cos(\varepsilon) = \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\beta\right)^2} - 1}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2} - 1}} * \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\beta\right)^2} - 1}}}$$

$$\cos(\varepsilon) = \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\beta\right)^2} - 1}}{\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \cos\left(\frac{1}{2}\beta\right)}}$$

$$\varepsilon = \arccos\left(\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \cos\left(\frac{1}{2}\beta\right) * \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\beta\right)^2} - 1}\right)$$

Für die Strecke S(Hypothenuse) ergibt sich also:

$$\sin(\varepsilon) = \frac{\left(\frac{R}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}\right)}{S}$$

$$S = \frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$$

Nun überlegt man sich, dass $r(\delta)$ eine logarithmische Spirale ist. Die Spirale, die Schienen auf dem Kegel zeichnen würden, hat nämlich die Eigenschaft, dass es sich um eine gleichwinklige Spirale handelt, und dass sich der Abstand zur Rotationsachse immer um einen bestimmten Faktor pro Winkel verringert. In die Ebene gepresst entspricht sie der gesuchten Funktion. (besonders Anschaulich siehe Ende von Aufgabenteil e) Also gilt:

$$r(\delta) = a * e^{k * \delta}$$

Mit der Forderung:

$$r(0) = R$$

$$r(\delta) = R * e^{k * \delta}$$

Und mit der Forderung, dass die Bogenlänge der Spirale für unendlich große Winkel kombiniert mit der Ausdehnung in die 3te Dimension (Satz des Pythagoras) des Doppelkegels gleich der Gesamtlänge der Spirale ist. Nach der Formel für die Bogenlänge in Polarkoordinaten ergibt sich also:

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{dr(\delta)}{d\delta}\right)^2 + r(\delta)^2} d\delta$$

Kombiniert man dies mit dem Satz des Pythagoras und bezieht so die dritte Dimension mit ein, ergibt sich also die Forderung:

$$\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{\left(\frac{R}{\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}\right)^2 + \left(\int_0^\infty \sqrt{\left(\frac{dr(\delta)}{d\delta}\right)^2 + r(\delta)^2} d\delta\right)^2}$$

$$\text{mit } r(\delta) = R * e^{k*\delta}$$

Lösen des Integrals:

$$\int_0^\infty \sqrt{(R * k * e^{k*\delta})^2 + (R * e^{k*\delta})^2} d\delta$$

$$\int_0^\infty \sqrt{R^2 * (e^{k*\delta})^2 * (k^2 + 1)} d\delta$$

$$\int_0^\infty e^{k*\delta} * R\sqrt{(k^2 + 1)} d\delta$$

$$R\sqrt{(k^2 + 1)} \int_0^\infty e^{k*\delta} d\delta$$

$$R\sqrt{(k^2 + 1)} \left[\frac{1}{k} e^{k*\delta} \right]_0^\infty$$

Dies kann nur gegen einen Wert konvergieren, wenn k negativ ist. K muss also negativ sein. Unter der Annahme k<0 Also:

$$R\sqrt{(k^2 + 1)} * \left(-\frac{1}{k}\right)$$

$$R\sqrt{(k^2 + 1) * \left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$R\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}$$

Also mit der oberen Formel:

$$\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{\left(\frac{R}{\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}\right)^2 + \left(R\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}\right)^2}$$

$$\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{\frac{R^2}{\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2} + R^2\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)}$$

$$\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{R^2\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2} + 1 + \frac{1}{k^2}\right)}$$

$$\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = R \sqrt{\frac{1}{\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2} + 1 + \frac{1}{k^2}}$$

$$\left(\frac{\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{R}\right)^2 - \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2} - 1 = \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right)^2 \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2}{R^2 * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2} - \frac{R^2}{\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 * R^2} - \frac{\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 * R^2}{\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 * R^2} = \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right)^2 - R^2 - \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 * R^2}{R^2 * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2} = \frac{1}{k^2}$$

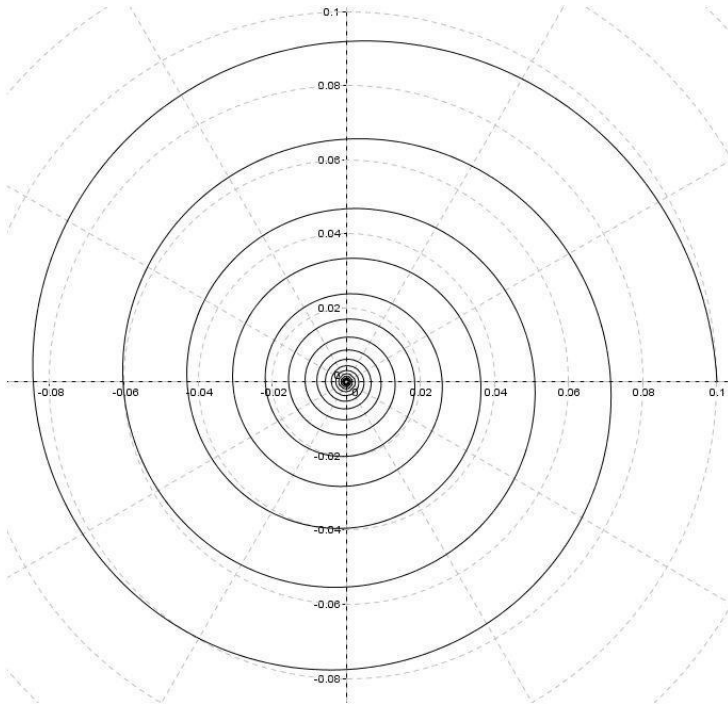
$$k^2 = \frac{R^2 * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2}{\left(\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right)^2 - R^2 * \left(1 + \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2\right)}$$

$$k = - \frac{R * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right)^2 - R^2 * \left(1 + \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2\right)}}$$

Also ist die Funktion:

$$r(\delta) = R * e^{\frac{R * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right)^2 - R^2 * \left(1 + \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2\right)}} * \delta}$$

In Polarkoordinaten sieht die Kurve für die in Aufgabenteil d gegebenen Werte wie folgt aus:



Nun braucht man $r(t)$ und gelangt einfach durch Einsetzen des zurückgelegten Winkels nach einer Zeit dorthin:

$$\delta(t) = \int \omega(t) dt = \int \frac{10 * y'_S * F_S}{3 * m * R^2} t dt = \frac{10 * y'_S * F_S}{6 * m * R^2} t^2$$

$$r(\delta) = R * e^{k * \delta}$$

$$\Rightarrow r(t) = R * e^{k * \left(\frac{10 * y'_S * F_S}{6 * m * R^2} t^2\right)}$$

Mit $v(t) = \omega(t) * r(t)$

$$v(t) = \frac{10 * y'_S * F_S}{3 * m * R^2} t * R * e^{k * \left(\frac{10 * y'_S * F_S}{6 * m * R^2} t^2\right)}$$

Der Übersichtlichkeit wegen substituieren wir:

$$\frac{10 * y'_S * F_S}{3 * m * R^2} := z$$

$$v(t) = z * R * t * e^{\frac{1}{2}k*z*(t^2)}$$

$$s(t) = \int v(t) dt = \int z * R * t * e^{\frac{1}{2}k*z*(t^2)} dt = z * R * \int t * e^{\frac{1}{2}k*z*(t^2)} dt = z * R * \frac{1}{2 * \frac{1}{2}k * z} * e^{\frac{1}{2}k*z*t^2}$$

$$s(t) = \frac{R}{k} * e^{\frac{1}{2}k*z*(t^2)}$$

Nach t umformen:

$$\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{s * k}{R}\right) * 2}{k * z}} = t(s)$$

In v(t) einsetzen und man hat v(s):

$$v(s) = z * R * \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{s * k}{R}\right) * 2}{k * z}} * e^{\frac{1}{2}k*z*\left(\left(\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{s * k}{R}\right) * 2}{k * z}}\right)^2\right)}$$

$$v(s) = z * R * \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{s * k}{R}\right) * 2}{k * z}} * e^{\frac{1}{2}k*z*\left(\frac{\ln\left(\frac{s * k}{R}\right) * 2}{k * z}\right)}$$

$$v(s) = z * R * \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{s * k}{R}\right) * 2}{k * z}} * e^{\ln\left(\frac{s * k}{R}\right)}$$

$$v(s) = z * R * \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{s * k}{R}\right) * 2}{k * z}} * \frac{s * k}{R}$$

$$v(s) = z * \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{s * k}{R}\right) * 2}{k * z}} * s * k$$

$$k = - \frac{R * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right)^2 - R^2 * \left(1 + \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2\right)}}$$

$$z = \frac{10 * y'_s * F_S}{3 * m * R^2}$$

$$F_S = \sin(\arctan(-L)) * m * g$$

$$L = \frac{\left(\sin(\gamma) - \cos(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) \right)}{\sin(\gamma) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) + \cos(\gamma)}$$

$$y'_S = R - \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * x'_S = R - \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * s$$

Exp

$$z = \frac{10 * \left(R - \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * s \right) * F_S}{3 * m * R^2} = \frac{10 * R * F_S}{3 * m * R^2} - \frac{10 * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * F_S}{3 * m * R^2} * s$$

$$z_1 = \frac{10 * F_S}{3 * m * R}$$

$$z_2 = \frac{10 * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) * F_S}{3 * m * R^2}$$

$$z = z_1 - z_2 * s$$

$$\varepsilon = \arccos \left(\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \cos\left(\frac{1}{2}\beta\right) * \sqrt{\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\beta\right)^2} - 1} \right)$$

Somit ist dies die Formel für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Strecke in der aufgespannten Ebene:

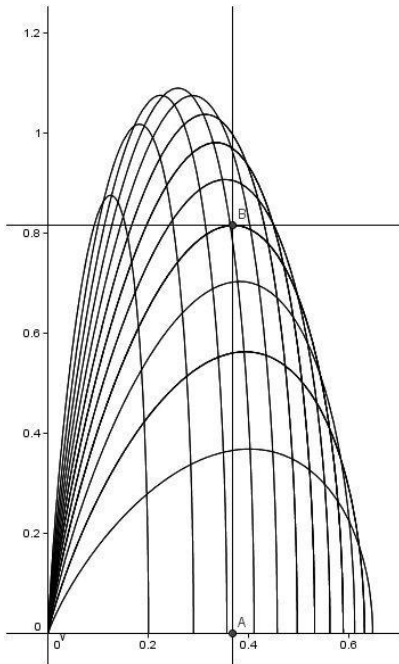
$$v(s) = (z_1 - z_2 * s) * \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{s * k}{R}\right) * 2}{k * (z_1 - z_2 * s)} * s * k}$$

Plausibilitätsprüfung (Stärken und Schwächen der Formel):

Der Graph lässt erkennen, dass der Doppelkegel an Geschwindigkeit zulegt, nach etwas mehr als der Hälfte aber wieder ausgebremst wird. Die Unsymmetrie ist daher plausibel, da der Schwerpunkt, wie in der Aufgabe gefordert, relativ zur aufgespannten Ebene betrachtet wird. Beispielschaaren mit konstantem R und in d angegebenen Werten untermauern die Plausibilität:

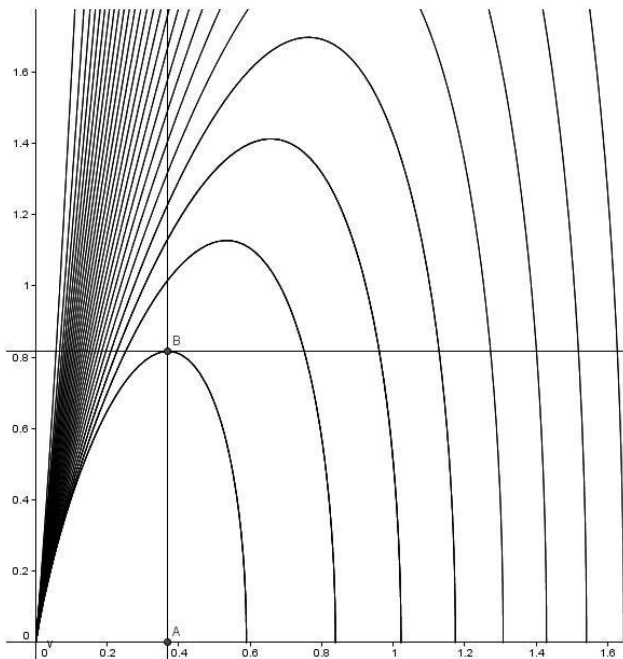
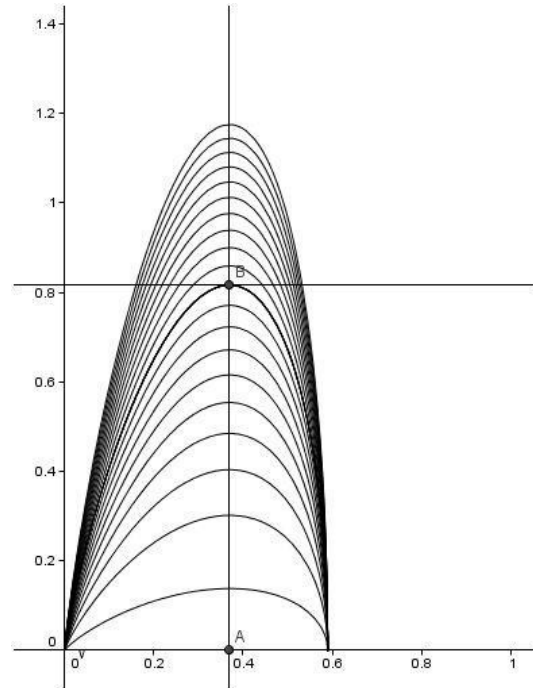
Schaar 1 der Kurve mit $\alpha = 50^\circ; \gamma = 5^\circ$

$R = 0,376317m$ von $\beta = 25^\circ - 80^\circ$



Schaar 2 der Kurve mit $\alpha = 50^\circ; \beta = 40^\circ$

$R = 0,376317m$ von $\gamma = 9,5^\circ - 0^\circ$



Schaar 3 der Kurve mit $\beta = 40^\circ; \gamma = 5^\circ$

$R = 0,376317m$ von $\alpha = 50^\circ - 85^\circ$

Die Angaben von z.b. "*Winkel* = $50^\circ - 85^\circ$ "

sind so gewählt, dass der Graph, der der x-Achse offensichtlich am nächsten ist, dem ersten Winkel(50°) zugeordnet wird.

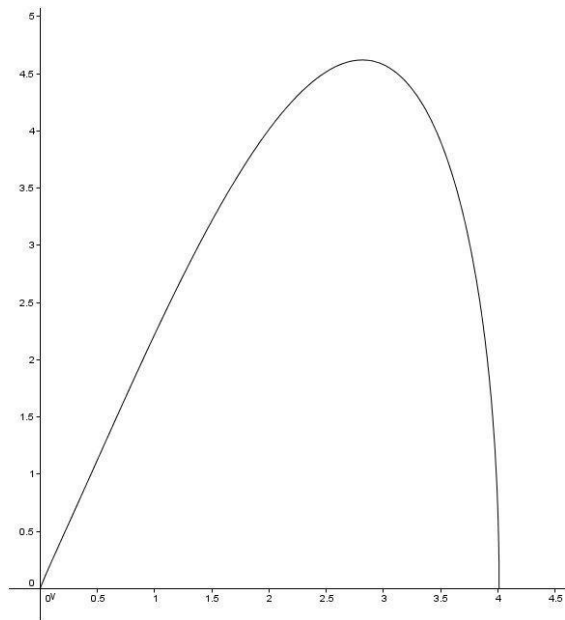
Die Graphen von Schaar 1 erscheinen sinnvoll, da ein kleiner Winkel β schon intuitiv für eine geringere Geschwindigkeit des Kegels sorgt. Auch wenn man sich die Steigung der Geraden für den Verlauf des Schwerpunktes anschaut, vergrößert sich diese mit kleiner werdendem β und somit vergrößert sich der Rollweg in der Ebene.

Die Graphen von Schaar 2 erscheinen sinnvoll, da ein großer Winkel γ für eine geringe Geschwindigkeit des Kegels spricht. Auch dass alle Nullstellen der Graphen identisch sind, ist sinnvoll, da zwar aus horizontaler Sicht von außen der Kegel intuitiv nicht so weit rollen wird, aber durch den erhöhten Winkel aus Sicht der Schienenebene dennoch der selbe Weg in ihr zurückgelegt wird.

Die Graphen von Schaar 3 erscheinen sinnvoll, da ein großer Winkel α auch intuitiv eine höhere Geschwindigkeit bedeutet.

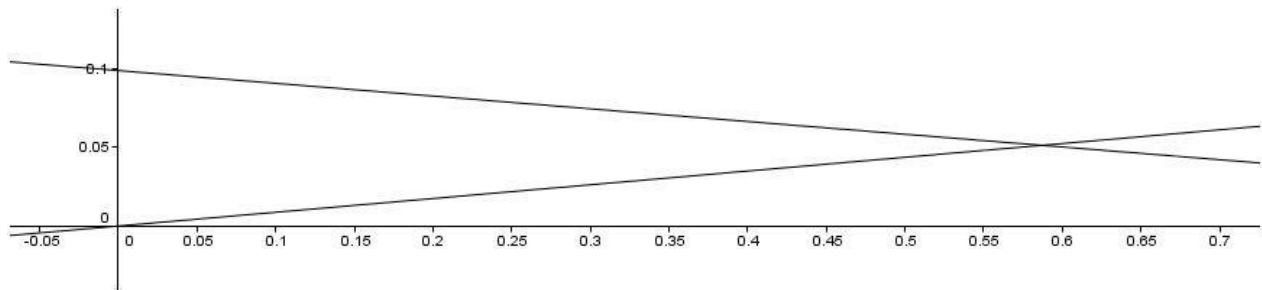
Was die Formel nicht plausibel macht, ist der Radius R des Kegels:

Setzt man alle Werte gemäß Aufgabenstellung d ein, ergibt sich folgendes Problem:



Nach dem Graphen muss die gerollte Strecke bei ca. 4m liegen

Schaut man sich folgende Konstruktion an...



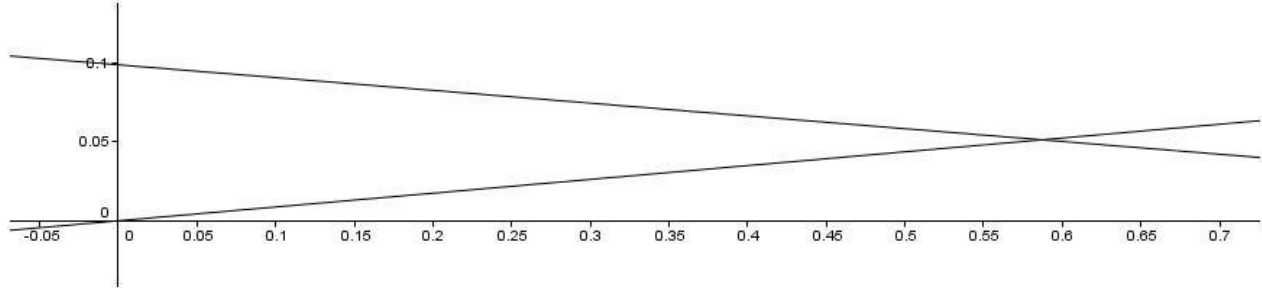
...weiß man, dass die gerollte Strecke in der Ebene nach Pythagoras um die 0,6m ist (genauer in d). Das passt nicht zusammen.

Dennoch lässt sich aufgrund des Verhaltens bezüglich der Variation der Winkel vermuten, dass die Funktion von den Winkeln her passen kann. Rein von der Methodik ist die Herleitung plausibel

Nr.1 d)

Hergeleitet wurde in c bereits folgende Funktion für die Kurve auf der sich der Schwerpunkt bewegt:

$$y_S(x_S) = L * x_S + R(\cos(\gamma) + \sin(\gamma) * L)$$



Die in der Ebene gerollte Strecke ist folglich die Strecke vom Ursprung bis zum Schnittpunkt mit der aufgespannten Ebenen, die in 2 Dimensionen ebenfalls zur Gerade wird. Zu dieser Geraden gehört offenbar folgende Funktionsgleichung:

$$E(x_S) = \tan(\gamma) * x_S$$

Beim Schnittpunkt gilt:

$$y_S(x_S) = E(x_S)$$

$$L * x_S + R(\cos(\gamma) + \sin(\gamma) * L) = \tan(\gamma) * x_S$$

$$x_S(L - \tan(\gamma)) + R(\cos(\gamma) + \sin(\gamma) * L) = 0$$

$$x_{S1} = -\frac{R(\cos(\gamma) + \sin(\gamma) * L)}{L - \tan(\gamma)}$$

Für den y-Wert ergibt sich:

$$y_{S1} = E(x_{S1}) = -\tan(\gamma) \frac{R(\cos(\gamma) + \sin(\gamma) * L)}{L - \tan(\gamma)}$$

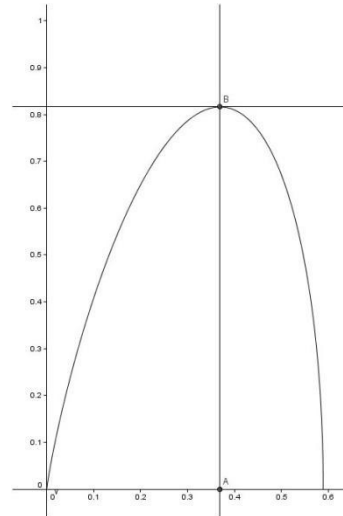
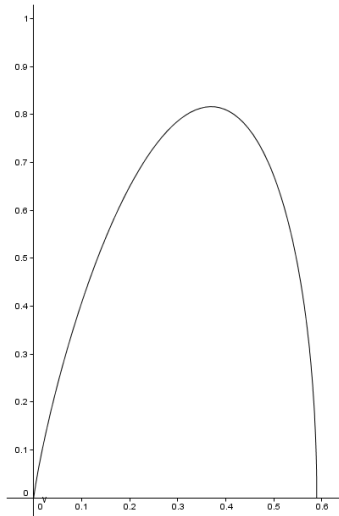
Mit Pythagoras also:

$$S(\gamma, R, L(\alpha, \beta, \gamma)) = \sqrt{\left(-\frac{R(\cos(\gamma) + \sin(\gamma) * L)}{L - \tan(\gamma)}\right)^2 + \left(-\tan(\gamma) \frac{R(\cos(\gamma) + \sin(\gamma) * L)}{L - \tan(\gamma)}\right)^2}$$

Setzt man die gegebenen Werte ein ergibt sich:

$$S \approx 0,589198433996418 \text{ m}$$

Geht man von einer plausiblen Kurvenschaar bezüglich α, β, γ in c aus und legt R so fest, dass an berechneter Stelle eine Nullstelle ist, so ist der Y-Wert des Hochpunktes ungefähr die maximal Geschwindigkeit. Mit einem $R \approx 0,3763175 \text{ m}$, welches sich in beliebiger Genauigkeit z.B mit einer Variante des Newtonverfahren bestimmen lässt, ergibt sich folgende Kurve:



Der y-Wert des Hochpunktes der Funktion ergibt sich durch systematisches Vergleichen von y bei variablem Verändern von x eine analytische Lösung ist nicht möglich:

$$y_{max} = v_{max} \approx 0,8162584751 \frac{m}{s}$$

e)

Die angegebene Annahme wurde in keinem Aufgabenteil benutzt und daher sind die gelieferten Ergebnisse unabhängig von dieser. Somit ist herausgefunden was tatsächlich passiert. Die tatsächlichen Auflagepunkte werden durch die Spirale charakterisiert, die hergeleitet wurde. Diese lässt sich bei Bedarf parametrisieren und aus der Ebene durch eine 3te Vektorkomponente in den Raum „ziehen“ und hat dann nach Spiegelung an der x1x2-Ebene den genauen räumlichen Verlauf der Auflagepunkte auf dem Doppelkegel gegeben.

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) * r(\delta) \\ \sin(\delta) * r(\delta) \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Mit wachsendem δ „schmiegt“ sich die Spirale asymptotisch an die Spitze des Kegels an. x_3 kann also nicht linear sein sondern startet bei einem Wert und schmiegt sich an einen höheren Wert an. x_3 muss also eine exponentiell beschränkte Wachstumsfunktion sein, die im Exponenten den gleichen Faktor wie die Funktion $r(\delta)$ im Exponenten hat. Also:

$$x_3 = c * e^{\frac{R * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right)^2 - R^2 * \left(1 + \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2\right)}} * \delta}$$

Jetzt überlegt man sich, dass c die Höhe einer der Kegel im Doppelkegel ist, und man weiß nach Betrachtung der Skizze:

$$\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{R}{c}$$

$$c = \frac{R}{\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$$

$$x_3 = \frac{R}{\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)} * e^{\frac{R * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right)^2 - R^2 * \left(1 + \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2\right)}} * \delta}$$

Insgesamt gilt also für den Ortsvektor des Berührungspunktes $\vec{P}$ in Abhängigkeit vom gerollten Winkel δ :

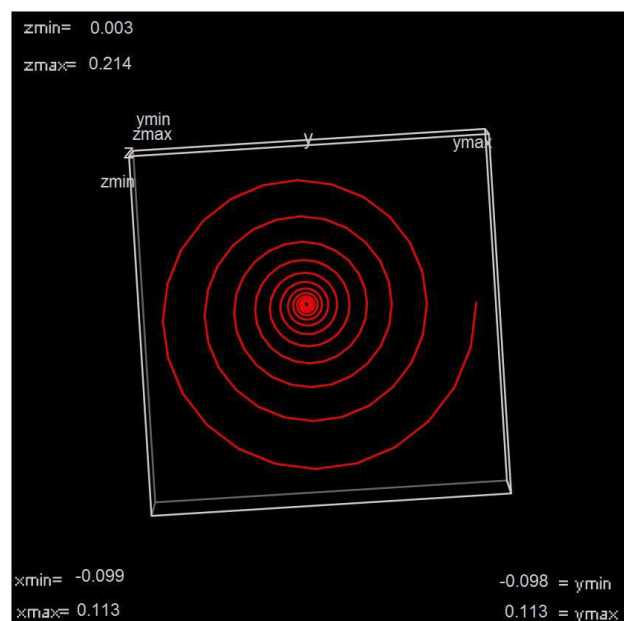
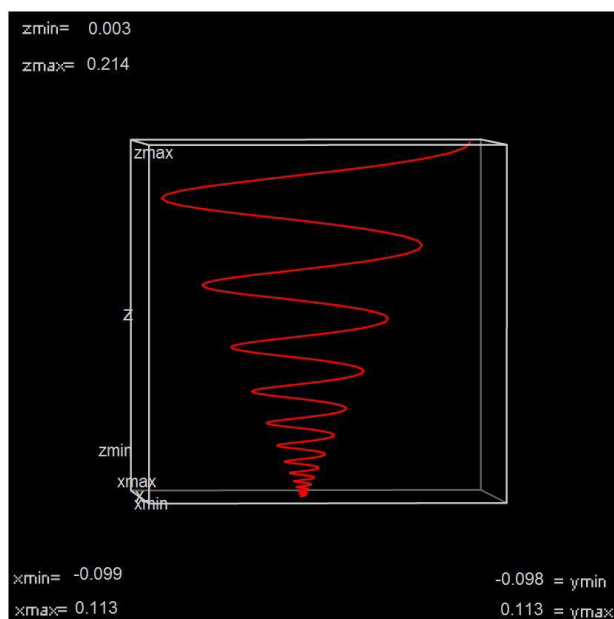
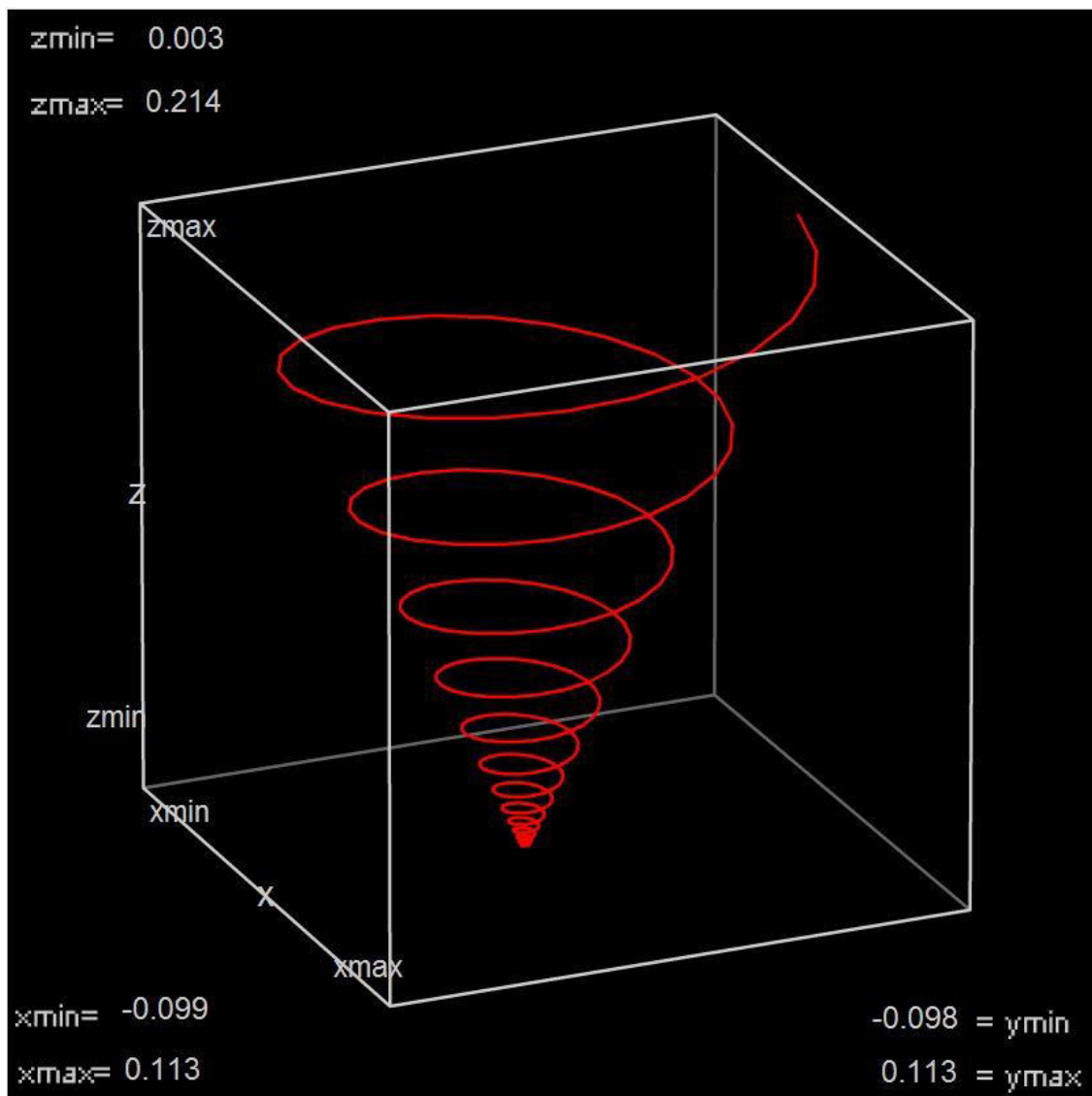
$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) * R * e^{\frac{R * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right)^2 - R^2 * \left(1 + \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2\right)}} * \delta \\ \sin(\delta) * R * e^{\frac{R * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right)^2 - R^2 * \left(1 + \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2\right)}} * \delta \\ \frac{R}{\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)} * e^{\frac{R * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{R} * \sin(\varepsilon) * \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) * \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right)^2 - R^2 * \left(1 + \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2\right)}} * \delta \end{pmatrix}$$

Mit den Werten aus d ergibt sich folgende Kurve in 3D (räumlich betrachtet, von der Seite, von Oben):

(ggf. die Komponenten(auf die Seite legen) vertauschen und mit Beträgen(spiegeln) und räumlichen Verschiebungen(Startpunkt definieren) arbeiten um das ganze anschaulich und der Situation angepasst zu verwenden.)

Hinweis:

In der gesamten Aufgabe 1 wurde angenommen, dass keine Reibung existiert(z.B. durch Schienen, Luftwiderstand). Aerodynamische Effekte(z.B. Magnuseffekt) wurden ebenfalls nicht beachtet. Die Situation wird als idealisiert angenommen(keine Störungen von außen).

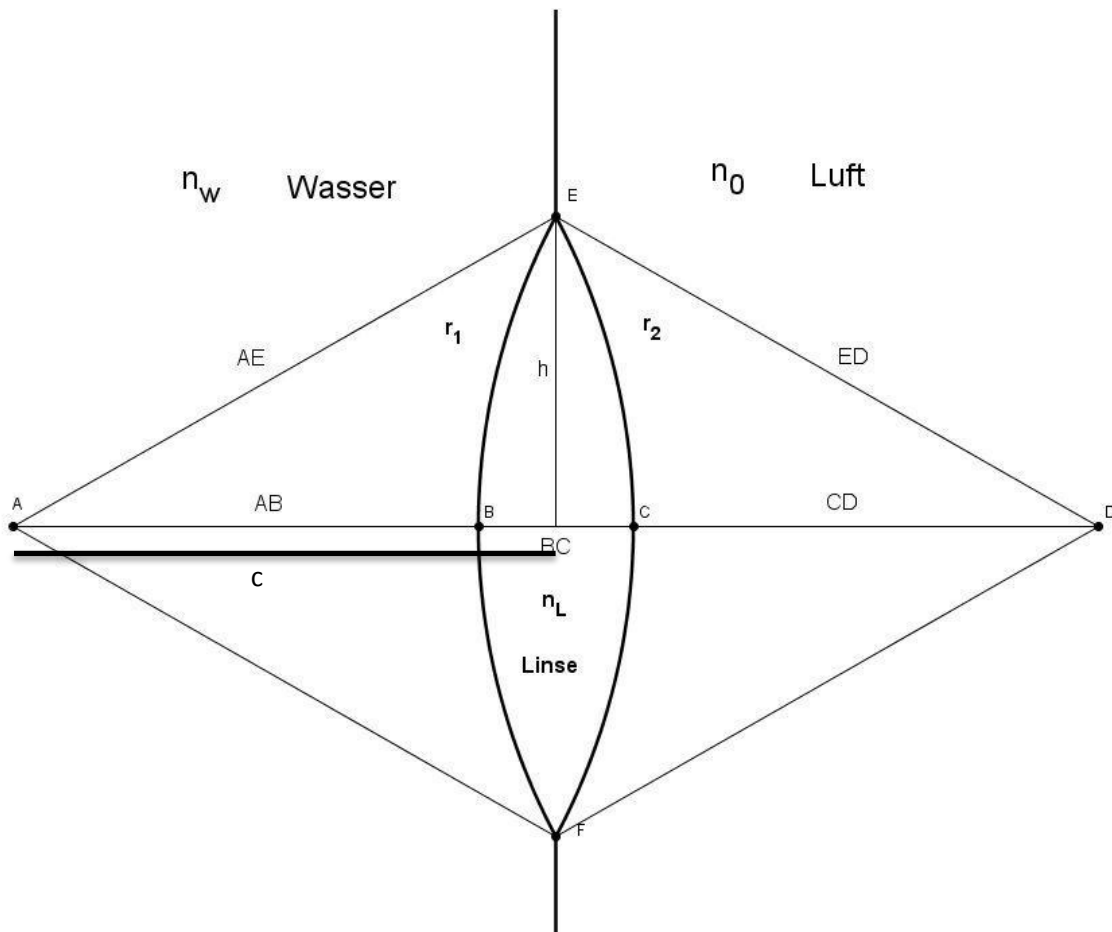


Aufgabe 2

Nr.2 a)

Um eine Vorschrift für die Lage des Bildes in Abhängigkeit vom Gegenstand zu erhalten, wird zunächst eine allgemeine Betrachtung vorgenommen, wobei anschließend der Spezialfall, wenn $r_1 \rightarrow \infty$ geht, betrachtet wird, und dieser gleichzeitig die Lösung ist. Wie angegeben wird die paraxiale Optik als Modell verwendet. (AE ist also in Näherung die Gegenstandsweite und ED in Näherung die Bildweite)

Skizze:



Nach dem fermatschen Prinzip sind die Strecken $AE+ED$ zeitlich gleichlang wie $AB+BC+CD$. Daraus folgt:

$$n_w * AE + n_0 * ED = n_w * AB + n_L * BC + n_0 * CD$$

Nun betrachtet man um wie viel länger der Weg $AE+ED$ als AD ist:

Zunächst für AE:

$$\Delta S_{AE} = AE - c$$

Nach dem Satz des Pythagoras:

$$AE^2 - c^2 = (AE + c) * (AE - c) = (AE + c) * \Delta S_{AE} = h^2$$

Da mit Strahlen nahe der optischen Achse, also Kleinwinkelnäherung gerechnet wird:

$$AE \approx c$$

$$\Rightarrow 2 * AE * \Delta S_{AE} = h^2$$

$$\Rightarrow \Delta S_{AE} = \frac{h^2}{2 * AE}$$

Also gilt insgesamt für die optische Wegdifferenz:

$$\Delta S_1 = \frac{h^2}{2 * AE} * n_w + \frac{h^2}{2 * ED} * n_0$$

Nach dem fermatschen Prinzip muss diese Wegdifferenz ausgeglichen sein, durch den optisch längeren Weg auf der Strecke durch BC. Dazu überlegt man sich, welchen Weg(optisch) das Licht ohne das Linsenmaterial auf der Strecke BC zurückgelegt hat, und zieht diesen Weg von dem Weg mit Linsenmaterial ab. In dem Fall der Plankonvexen Linse die von außen aufgeklebt wird wäre das:

$$S_{ohne Linse} = BC * n_0$$

$$\Rightarrow \Delta S_2 = n_L * BC - (BC * n_0)$$

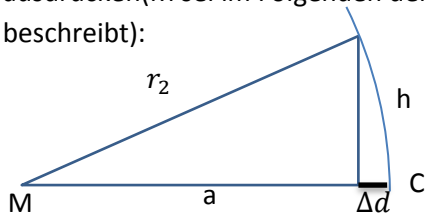
$$\Delta S_2 = BC(n_L - n_0)$$

Es muss gelten:

$$\Delta S_1 = \Delta S_2$$

$$\frac{h^2}{2 * AE} * n_w + \frac{h^2}{2 * ED} * n_0 = BC(n_L - n_0)$$

BC lässt sich in Näherung mit dem selben Trick, der bei ΔS_{AE} angewandt wurde mit h^2 , r_1 und r_2 ausdrücken(M sei im Folgenden der Mittelpunkt einer der Kreise dessen Rand den einen Rand der Linse beschreibt):



$$r_2^2 - a^2 = (r_2 + a)(r_2 - a) = h^2$$

$$\Delta d = (r_2 - a)$$

$$(r_2 + a) * \Delta d = h^2$$

Mit der Kleinwinkelnäherung:

$$r_2 \approx a$$

$$\Delta d = \frac{h^2}{2 * r_2}$$

BC ist folglich:

$$BC = \frac{h^2}{2 * r_1} + \frac{h^2}{2 * r_2}$$

Setzt man das nun in die obere Formel ein:

$$\frac{h^2}{2 * AE} * n_w + \frac{h^2}{2 * ED} * n_0 = BC(n_L - n_0)$$

$$\frac{h^2}{2 * AE} * n_w + \frac{h^2}{2 * ED} * n_0 = \left(\frac{h^2}{2 * r_1} + \frac{h^2}{2 * r_2} \right) (n_L - n_0)$$

$$\frac{1}{AE} * n_w + \frac{1}{ED} * n_0 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) (n_L - n_0)$$

Fallen parallele Strahlen ein, wird ED annäherungsweise zur realen Brennweite (Brennweite des ganzen Aufbaus):

$$\lim_{AE \rightarrow \infty} \frac{1}{AE} * n_w + \frac{1}{ED} * n_0 = \frac{1}{ED} * n_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_R} = \frac{1}{n_0} * \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) * (n_L - n_0)$$

Mit $r_1 \rightarrow \infty$ gilt für den vorliegenden Fall:

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{n_0} * \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) * (n_L - n_0) = \frac{1}{n_0 * r_2} * (n_L - n_0) = \frac{1}{f_R}$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{f_R}{n_0} * (n_L - n_0)$$

Das gleiche für die Formel, die die Beziehung zwischen AE und ED beschreibt:

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{AE} * n_w + \frac{1}{ED} * n_0 = \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) (n_L - n_0) = \frac{1}{r_2} (n_L - n_0)$$

Für den gesuchten Fall gilt also:

$$\Rightarrow \frac{1}{AE} * n_w + \frac{1}{ED} * n_0 = \frac{1}{r_2} (n_L - n_0)$$

Ersetzt man r_2 durch $\frac{f_R}{n_0} * (n_L - n_0)$:

$$\frac{1}{AE} * n_w + \frac{1}{ED} * n_0 = \frac{1}{\frac{f_R}{n_0} * (n_L - n_0)} (n_L - n_0)$$

$$\frac{1}{AE} * n_w + \frac{1}{ED} * n_0 = \frac{n_0}{f_R}$$

$$\frac{1}{ED} = \frac{\frac{n_0}{f_R} - \frac{1}{AE} * n_w}{n_0}$$

Somit ist die Lage möglicher Bilder (ED) in Abhängigkeit von der Lage des Gegenstandes selbst(AE):

$$ED = \frac{n_0}{\frac{n_0}{f_R} - \frac{1}{AE} * n_w}$$

Wobei(r ist der Krümmungsradius der gebogenen Seite):

$$f_R = \frac{n_0 * r}{(n_L - n_0)}$$

Nun muss noch betrachtet werden, wie die Beziehung zwischen der realen Brennweite f_R und der Brennweite der Linse f ist. Es gilt:

$$\frac{1}{f_R} = \frac{(n_L - n_0)}{n_0 * r}$$

Nach der vereinfachten Linsenschleiferformel gilt:

$$\frac{1}{f} = \frac{(n_L - n_0)}{n_0} * \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

Lässt man $r_1 \rightarrow \infty$ wachsen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{(n_L - n_0)}{n_0 * r} \\ \Rightarrow f_R &= f \end{aligned}$$

Also:

$$ED = \frac{n_0}{\frac{n_0}{f} - \frac{1}{AE} * n_w}$$

AE ist positiv, wenn der Gegenstand links von der Linse liegt, und ED ist positiv, wenn das Bild rechts von der Linse liegt.

Wenn ED negativ ist und AE positiv ist, so muss folglich ein virtuelles und daraus folgend ein aufrechtes und vergrößertes Bild bestehen. Wenn ED positiv ist und AE positiv ist, so muss ein reelles und daraus folgend umgedrehtes Bild bestehen.

Betrachtet wird also wann ED positiv bzw. negativ ist:

$$ED > 0$$

$$\frac{n_0}{\frac{n_0}{f} - \frac{1}{AE} * n_w} > 0$$

$\frac{n_0}{\frac{n_0}{f} - \frac{1}{AE} * n_w}$ ist größer 0 wenn $\frac{n_0}{f} - \frac{1}{AE} * n_w$ größer 0 ist:

$$\frac{n_0}{f} - \frac{1}{AE} * n_w > 0$$

$$\frac{n_0}{f} > \frac{1}{AE} * n_w$$

$$AE > \frac{f}{n_0} * n_w$$

$\Rightarrow ED$ ist folglich größer Null wenn $AE > \frac{f}{n_0} * n_w$ gilt. In diesem Fall besteht ein umgekehrtes reelles Bild.

$\Rightarrow ED$ ist folglich kleiner Null wenn $AE < \frac{f}{n_0} * n_w$ gilt. In diesem Fall besteht ein aufrechtes virtuelles und vergrößertes Bild.

Ist der Fall $2 * \frac{f}{n_0} * n_w > AE > \frac{f}{n_0} * n_w$ gegeben, so handelt es sich um ein umgekehrtes reelles vergrößertes Bild.

Ist der Fall $AE > 2 * \frac{f}{n_0} * n_w$ gegeben, so handelt es sich um ein umgekehrtes reelles verkleinertes Bild.

Ist der Fall $AE = 2 * \frac{f}{n_0} * n_w$ gegeben, so handelt es sich um ein umgekehrtes reelles Bild, das dem ursprünglichem Gegenstand entspricht.

Nr.2 b)

$$ED = \frac{n_0}{\frac{n_0}{f} - \frac{1}{AE} * n_w}$$

AE gleich 2,5*f setzen:

$$ED = \frac{n_0}{\frac{n_0}{f} - \frac{1}{2,5 * f} * n_w}$$

$$ED = \frac{n_0}{\frac{n_0 - 0,4 * n_w}{f}} = \frac{n_0 * f}{n_0 - 0,4 * n_w}$$

Mit $n_0 \approx 1$; $n_w \approx 1,33$; $n_L = 1,5$

$$ED = \frac{250}{117} f \approx 2,1367 f$$

Oder in Abhängigkeit von r:

$$ED = \frac{250}{117} \frac{n_0 * r}{n_L - n_0}$$

$$ED \approx 4,2735 * r$$

Nun zum Größenfaktor g

$$AE <> \frac{f}{n_0} * n_w$$

$$AE = 2,5 * f$$

$$2,5 * f <> \frac{f}{n_0} * n_w$$

$$2,5 * f > 1,33 f$$

$$\Rightarrow g < 1$$

Es gilt nach dem Strahlensatz, wenn man 1 als Ausgangsgröße des Gegenstandes betrachtet:

$$\frac{1}{AE} = \frac{g}{ED}$$

$$g = \frac{ED}{AE}$$

$$g = \frac{2,1367 f}{2,5 * f} \approx 0,8547$$

⇒ Das Bild ist um den Faktor 0,8547 vergrößert (also ist es verkleinert).

Nr.2 c)

Vergleicht man die gegebene Situation aus c mit der Ausgangssituation in a) so fällt auf, dass sich im Model aus a) 2 Dinge verändert haben: zum einen wird nun der andere Radius r_2 gegen unendlich betrachtet, zum anderen ändert sich $S_{ohne Linse}$ (siehe a). Gefunden wurde bereits:

$$\Delta S_1 = \frac{h^2}{2 * AE} * n_w + \frac{h^2}{2 * ED} * n_0$$

Mit der neuen Bedingung gilt:

$$S_{ohne Linse} = BC * n_w$$

Also:

$$\Delta S_2 = BC(n_L - n_w)$$

Mit den selben Schritten wie in a):

$$\frac{h^2}{2 * AE} * n_w + \frac{h^2}{2 * ED} * n_0 = BC(n_L - n_w)$$

$$\frac{h^2}{2 * AE} * n_w + \frac{h^2}{2 * ED} * n_0 = \left(\frac{h^2}{2 * r_1} + \frac{h^2}{2 * r_2} \right) (n_L - n_w)$$

$$\frac{1}{AE} * n_w + \frac{1}{ED} * n_0 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) (n_L - n_w)$$

$$\lim_{AE \rightarrow \infty} \frac{1}{AE} * n_w + \frac{1}{ED} * n_0 = \frac{1}{ED} * n_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_R} = \frac{1}{n_0} * \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) * (n_L - n_w)$$

Mit $r_2 \rightarrow \infty$ gilt für den vorliegenden Fall:

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{n_0} * \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) * (n_L - n_w) = \frac{1}{n_0 * r_1} * (n_L - n_w) = \frac{1}{f_R}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{f_R}{n_0} * (n_L - n_w)$$

Das gleiche für die „eigentliche“ Formel:

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{AE} * n_w + \frac{1}{ED} * n_0 = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) (n_L - n_w) = \frac{1}{r_1} (n_L - n_w)$$

Für den gesuchten Fall gilt also:

$$\Rightarrow \frac{1}{AE} * n_w + \frac{1}{ED} * n_0 = \frac{1}{r_1} (n_L - n_w)$$

bzw:

$$\frac{1}{AE} * n_w + \frac{1}{ED} * n_0 = \frac{1}{\frac{f_R}{n_0} * (n_L - n_w)} (n_L - n_w)$$

$$\frac{1}{AE} * n_w + \frac{1}{ED} * n_0 = \frac{n_0}{f_R}$$

$$ED = \frac{n_0}{\frac{n_0}{f_R} - \frac{1}{AE} * n_w}$$

$$f_R = \frac{n_0 * r}{(n_L - n_w)}$$

$$ED = \frac{n_0}{\frac{(n_L - n_w)}{r} - \frac{1}{AE} * n_w}$$

Die Brennweite f der Linse ergibt sich aus der Linsenschleiferformel mit $r_2 \Rightarrow \infty$ und ist diesmal nicht gleich f_R :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{n_0} * \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) * (n_L - n_0)$$

$$f = \frac{n_0 * r}{n_L - n_0}$$

Es gilt:

$$f_R = a * f$$

$$\frac{n_0 * r}{n_L - n_w} = a \frac{n_0 * r}{n_L - n_0}$$

$$a = \frac{n_L - n_0}{n_L - n_w}$$

$$\Rightarrow f_R = \frac{n_L - n_0}{n_L - n_w} * f$$

Mit

$$ED = \frac{n_0}{\frac{n_0}{f_R} - \frac{1}{AE} * n_w}$$

$$ED = \frac{n_0}{\frac{\frac{n_0}{n_L - n_0}}{n_L - n_w} * f - \frac{1}{AE} * n_w}$$

$$ED = \frac{n_0}{\frac{(n_L - n_w) * n_0}{(n_L - n_0) * f} - \frac{1}{AE} * n_w}$$

2,5f für AE eingesetzt:

$$ED = \frac{n_0}{\frac{(n_L - n_w) * n_0}{(n_L - n_0) * f} - \frac{1}{2,5f} * n_w}$$

Mit $n_0 \approx 1$; $n_w \approx 1,33$; $n_L = 1,5$

$$ED = \frac{1}{\frac{17}{50 * f} - \frac{133}{250 * f}}$$

$$ED = -\frac{125}{24} f$$

bzw. mit r:

$$f = \frac{n_0 * r}{n_L - n_0}$$

$$ED = -\frac{125}{24} * \frac{n_0 * r}{n_L - n_0}$$

$$ED = -\frac{125}{12} r$$

Nun wieder zum Größenfaktor g :

Es gilt nach dem Strahlensatz, wenn man 1 als Ausgangsgröße des Gegenstandes betrachtet:

$$\frac{1}{AE} = \frac{g}{ED}$$

$$g = \frac{ED}{AE}$$

$$g = \frac{-\frac{125}{24} f}{2,5 * f} \approx -2,083$$

⇒ Das Bild ist um den Faktor 2,083 vergrößert.

Aufgabe 3

Der Gedanke der Urlauber war:

Man sägt ein Loch in eine Stelle der Wand und ersetzt das herausgeschnittene Stück durch die Gefriertruhe, wobei der Raum, der im Normalbetrieb gekühlt wird, offen und von der Umweltluft erreichbar und von der Raumluft nicht erreichbar aufgestellt wird, sodass der Umwelt als unendlichem Wärmereservoir Wärme entzogen wird und dem Inneren des Blockhauses zugeführt wird. Sie wird quasi „abgekühlt“.

Betrachtet wird ein Wärmegleichgewicht mit (Q: spezifische Wärmekapazität; m: Masse; ΔT Temperaturdifferenz):

$$Q = c * m * \Delta T$$

Es gilt (m_K : Masse Kühlschrank; c_K spezifische Wärmekapazität Kühlschrank; T_K : Temperatur Kühlschrank; T_m : Gleichgewichtstemperatur (5°C); T_L : Temperatur der Raumluft; m_L Masse Raumluft um den Kühlschrank herum; c_L : spezifische Wärmekapazität Luft):

$$m_K * c_K (T_K - T_m) = m_L * c_L (T_m - T_L)$$

Bekannt sind (ρ_L : Dichte der Luft):

$$T_m = 5^\circ C$$

$$T_L = 6,5^\circ C$$

$$T_K = -18^\circ C$$

$$m_K * c_K = 80000 \frac{J}{K}$$

$$c_L \approx 1005 \frac{J}{kg * K}$$

$$\rho_L = 1,270 \frac{kg}{m^3}$$

Daraus kann man die Masse der umgebenen Luft bestimmen und mit Hilfe der Dichte auch das Volumen des Raumes abzüglich des Volumens des Gefrierschranks.

$$m_L = \frac{m_K * c_K (T_K - T_m)}{c_L (T_m - T_L)}$$

$$m_L = 1220,563847 kg$$

$$V_L = \frac{m_L}{\rho_L} = 961,07 m^3$$

Nr. 3a)

Würde man den Gefrierschrank öffnen, so würde sich die Temperatur annäherungsweise an 5°C angleichen. Die Wärme im Raum ist in diesem Fall also gleich der Wärme in dem Gefrierschrank:

Mit $Q = c * m * \Delta T$

$$m_K * c_K(T_K - T_m) = m_L * c_L(T_m - T_L)$$

$$m_L = \frac{m_K * c_K(T_K - T_m)}{c_L(T_m - T_L)}$$

Stellt man einen zweiten Gefrierschrank dazu gilt (T_{L2} : "neue" Temperatur der Raumluft; V_K : Volumen des Kühlschranks):

$$2 * m_K * c_K(T_K - T_m) = (m_L - V_K * \rho_L) * c_L(T_m - T_{L2})$$

Für kleine Volumina im Vergleich zum Raumvolumen kann man so rechnen (ohne Vereinfachung siehe nächste Seite)

Für kleine Volumen des Kühlschranks im Vergleich zum Raumvolumen minus ein Kühlschrankvolumen gilt:

Für $m_L \gg V_K * \rho_L$

$$2 * m_K * c_K(T_K - T_m) = m_L * c_L(T_m - T_{L2})$$

$$T_m - \frac{2 * m_K * c_K(T_K - T_m)}{m_L * c_L} = T_{L2}$$

Mit $m_L = \frac{m_K * c_K(T_K - T_m)}{c_L(T_m - T_L)}$

$$T_m - \frac{2 * m_K * c_K(T_K - T_m)}{\frac{m_K * c_K(T_K - T_m)}{c_L(T_m - T_L)} * c_L} = T_{L2}$$

$$T_m - \frac{2 * m_K * c_K(T_K - T_m) * c_L(T_m - T_L)}{m_K * c_K(T_K - T_m) * c_L} = T_{L2}$$

$$T_m - 2 * (T_m - T_L) = T_{L2}$$

$$2T_L - T_m \approx T_{L2}$$

$$T_{L2} \approx 281,15K = 8^\circ C$$

In der Realität ist die Temperatur geringfügig höher, da das tatsächliche Volumen der Luft um das Volumen der durch den zusätzlichen Kühlschrank verdrängten Luft kleiner ist. „Näherungsweise“ stellt sich aber eine Temperatur von 8°C ein.

Ohne diese Vereinfachung:

Die Wärme innerhalb des Systems Hütte - Gefrierschrank bleibt auf Grund der Energieerhaltung immer konstant, wenn man von einer perfekten Isolierung des Hauses ausgeht. Daher muss gelten:

$$m_K * c_K * T_K + m_L * c_L * T_L = \text{const} \approx 363449320J := E_0$$

Stellt man einen zweiten Gefrierschrank dazu gilt:

$$2 * m_K * c_K (T_K - T_m) = (m_L - V_K * \rho_L) * c_L (T_m - T_{L2})$$

$$\Rightarrow T_m - \frac{2 * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V_K * \rho_L) * c_L} = T_{L2}$$

Es muss gelten T_{L2} eingesetzt:

$$2 * m_K * c_K * T_K + (m_L - V_K * \rho_L) * c_L * T_{L2} = E_0$$

bzw:

$$2 * m_K * c_K * T_K + (m_L - V_K * \rho_L) * c_L * \left(T_m - \frac{2 * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V_K * \rho_L) * c_L} \right) = E_0$$

Lösen nach V_K

$$2 * m_K * c_K * T_K + (m_L - V_K * \rho_L) * c_L * T_m - (m_L - V_K * \rho_L) * c_L \frac{2 * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V_K * \rho_L) * c_L} = E_0$$

$$2 * m_K * c_K * T_K + m_L * c_L * T_m - V_K * \rho_L * c_L * T_m - m_L * c_L \frac{2 * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V_K * \rho_L) * c_L} + V_K * \rho_L * c_L \frac{2 * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V_K * \rho_L) * c_L} = E_0$$

$$2 * m_K * c_K * T_K + m_L * c_L * T_m - V_K * \rho_L * c_L * T_m - \frac{1}{(m_L - V_K * \rho_L)} * m_L * 2 * m_K * c_K (T_K - T_m) + \frac{V_K}{m_L - V_K * \rho_L} * \rho_L * 2 * m_K * c_K (T_K - T_m) = E_0$$

$$\frac{V_K}{m_L - V_K * \rho_L} * \rho_L * 2 * m_K * c_K (T_K - T_m) - V_K * \rho_L * c_L * T_m - \frac{1}{(m_L - V_K * \rho_L)} * m_L * 2 * m_K * c_K (T_K - T_m) = E_0 - 2 * m_K * c_K * T_K - m_L * c_L * T_m$$

Der Übersichtlichkeit wegen wird substituiert:

$$\rho_L * 2 * m_K * c_K (T_K - T_m) := c_1$$

$$\rho_L * c_L * T_m := c_2$$

$$m_L * 2 * m_K * c_K (T_K - T_m) := c_3$$

$$E_0 - 2 * m_K * c_K * T_K - m_L * c_L * T_m := c_4$$

$$\frac{V_K}{m_L - V_K * \rho_L} * c_1 - V_K * c_2 - \frac{1}{(m_L - V_K * \rho_L)} * c_3 = c_4$$

$$\frac{V_K * c_1 - c_3}{m_L - V_K * \rho_L} - \frac{V_K * c_2 * (m_L - V_K * \rho_L)}{m_L - V_K * \rho_L} = c_4$$

$$\frac{V_K * c_1 - c_3 - V_K * c_2 * (m_L - V_K * \rho_L) - c_4 * (m_L - V_K * \rho_L)}{m_L - V_K * \rho_L} = 0$$

$$V_K * c_1 - c_3 - V_K * c_2 * (m_L - V_K * \rho_L) - c_4 * (m_L - V_K * \rho_L) = 0$$

$$V_K * c_1 - c_3 - V_K * c_2 * m_L + V_K^2 * c_2 * \rho_L - c_4 * m_L + c_4 * V_K * \rho_L = 0$$

$$V_K^2 * c_2 * \rho_L + V_K (c_1 - c_2 * m_L + c_4 * \rho_L) - (c_3 + c_4 * m_L) = 0$$

Mit:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$V_{K1/2} = \frac{-(c_1 - c_2 * m_L + c_4 * \rho_L) \pm \sqrt{(c_1 - c_2 * m_L + c_4 * \rho_L)^2 + 4c_2 * \rho_L * (c_3 + c_4 * m_L)}}{2c_2 * \rho_L}$$

$$V_{K1} \approx 961,0736m^3$$

$$V_{K2} \approx 62,67877m^3$$

Es ergeben sich logischerweise für das Volumen zwei Ergebnisse. Zum einen das gesuchte Ergebnis von $V_K \approx 62,67877m^3$ für die Größe eines Kühlschranks, zum anderen das umgebene Luftvolumen des Raumes, wenn nur ein Kühlschrank im Raum befindlich ist. Nähme man dieses Volumen wäre folglich der ganze Raum ausgefüllt, und es gäbe nur einen Raum, für den die aufgestellte Bedingung natürlich auch gilt. V_{K1} ist also die triviale Lösung der Gleichung.

Für die Temperatur der Umgebungsluft gilt(siehe ggf. oben):

$$T_m - \frac{2 * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V_{K2} * \rho_L) * c_L} = T_{L2}$$

$$T_{L2} \approx 281,359302K = 8,209302\text{ }^{\circ}C$$

Nr.3 b)

Um ein thermodynamisches Gleichgewicht zu erreichen muss sich die aufgenommene Leistung des Gefrierschranks, die dadurch entsteht, dass der Gefrierschrank nicht perfekt isoliert ist, mit der aufgenommenen Leistung aufheben. Um das Maß der Wärmeabführung einschätzen zu können konstruiert man zunächst eine Funktion, die den Temperaturverlauf des Kühlschranks in Abhängigkeit von der Zeit darstellt, wenn der Kühlschrank nicht angeschlossen nach draußen gestellt wird:

Auf lange Sicht wird sich eine konstante Temperatur einstellen. Es herrscht also ein thermisches Gleichgewicht. Mathematisch wird also so modelliert, dass man davon ausgeht, dass eine abgegebene virtuelle Leistung des Kühlschranks gleich einer thermischen Leistung ist ,die vom Kühlschrank aufgenommen wird.

Wir wissen:

$$P = \frac{c * m * \Delta T}{t}$$

Und

$$P = \frac{dQ}{dt} \text{ bzw. } Q = \int P dt$$

Um eine Temperatur konstant zu halten, müssen sich aufgenommene und abgegebene Leistung aufheben. Die abgegebene Leistung ist hierbei negativ. Also gilt:

$$P_A + P_B = 0$$

$$\text{bzw. } P_A = -P_B$$

Daraus folgt:

$$Q_A = -Q_B$$

Mit $Q_A = c * m * \Delta T$ und $Q_B = \int_{t_1}^{t_2} P dt$:

$$c * m * \Delta T = - \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

Für die übertragene Wärmemenge gilt (h : Wärmeübergangskoeffizient, A : Verbindungsfläche der Systeme, ΔT_S : Temperaturunterschied der Systeme):

$$Q = h * A * \Delta T_S * \Delta t$$

bzw.:

$$Q = \int h * A * \Delta T_S dt$$

$$\Rightarrow P = h * A * \Delta T_S$$

mit

$$c * m * \Delta T = - \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

$$c * m * \Delta T = - \int_{t_1}^{t_2} h * A * \Delta T_S dt$$

Wenn man von einer konstanten Umgebungstemperatur T_u ausgeht aber einer variablen „Kühlschranktemperatur“ kann man das ganze so schreiben:

$$c * m * \Delta T = - \int_{t_1}^{t_2} h * A * (T(t) - T_u) dt$$

Betrachtet man t_2 als Variabel so liegt eine Integralfunktion vor die sich leicht nach t_2 ableiten lässt, da t_1 nur eine Verschiebung nach oben oder unten verursacht:

$$\frac{d c * m * \Delta T}{dt_2} = -h * A * (T(t_2) - T_u)$$

Mit $\Delta T = T(t_2) - T(t_1)$ ergibt sich:

$$\frac{d c * m * (T(t_2) - T(t_1))}{dt_2} = -h * A * (T(t_2) - T_u)$$

Daraus folgt:

$$\frac{d c * m * T(t_2) - c * m * T(t_1)}{dt_2} = -h * A * (T(t_2) - T_u)$$

Mit

$$t_2 := t$$

$$c * m * \dot{T} = -h * A * (T - T_u)$$

$$-\frac{c * m}{h * A} * \dot{T} = T - T_u$$

$$T + \frac{c * m}{h * A} * \dot{T} = T_u$$

$$\frac{c * m}{h * A} := \zeta$$

$$T + \zeta * \dot{T} = T_u$$

$$\dot{T} + \zeta * \ddot{T} = 0$$

$$\dot{T} = -\zeta * \ddot{T}$$

$$-\frac{1}{\zeta} = \frac{\ddot{T}}{\dot{T}}$$

$$-\int \frac{1}{\zeta} dt = \int \frac{\ddot{T}}{\dot{T}} dt$$

Substitution:

$$\dot{T} := u$$

$$\frac{du}{dt} = \ddot{T} \Rightarrow \frac{du}{\dot{T}} = dt$$

Mit:

$$\int \frac{\ddot{T}}{u} dt = \int \frac{\ddot{T}}{u} * \frac{du}{\dot{T}} = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| = \ln|\dot{T}| = -\int \frac{1}{\zeta} dt = -\frac{1}{\zeta} * t + C$$

$$\ln|\dot{T}| = -\frac{1}{\zeta} * t + C$$

$$\dot{T} = e^{\frac{1}{\zeta} * t + C} = e^C * e^{\frac{1}{\zeta} * t}$$

Mit $e^C := C_0$

$$\dot{T} = C_0 * e^{\frac{1}{\zeta} * t}$$

$$T = \int C_0 * e^{-\frac{1}{\zeta} * t} dt$$

$$T = -C_0 * \zeta * e^{-\frac{1}{\zeta} * t} + C_1$$

Mit $C_1 := T_m$: Umgebungstemperatur und $\frac{c * m}{h * A} = \zeta$

$$T(t) = -C_0 * \frac{c * m}{h * A} * e^{-\frac{h * A}{c * m} * t} + T_m$$

Mit der Forderung:

$$T(0) = T_K$$

$$T(0) = -C_0 * \frac{c * m}{h * A} * e^0 + T_m = T(t) = -C_0 * \frac{c * m}{h * A} + T_m$$

$$-C_0 * \frac{c * m}{h * A} + T_m = T_K$$

$$-C_0 * \frac{c * m}{h * A} = T_K - T_m$$

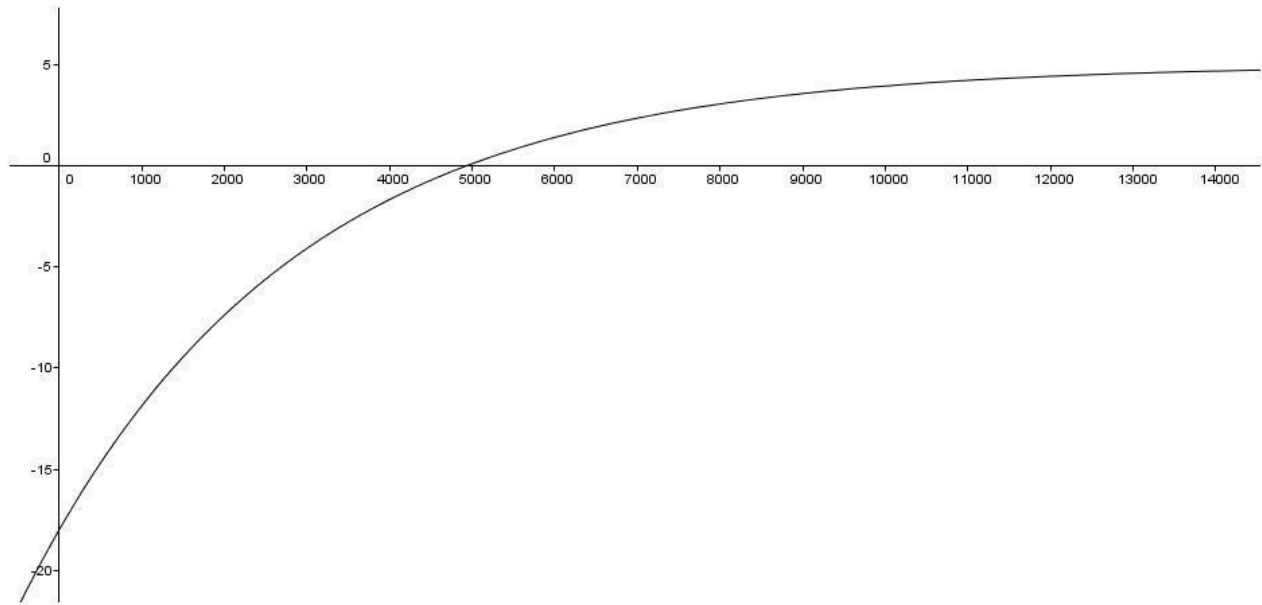
mit

$$T(t) = -C_0 * \frac{c * m}{h * A} * e^{-\frac{h * A}{c * m} * t} + T_m$$

gilt:

$$T(t) = (T_K - T_m) e^{-\frac{h * A}{c * m} * t} + T_m$$

Graph: T in °C; t in s



$h * A$ ist hierbei ein Maß für die Stärke der Isolierung des Gefrierschranks.

$$T_m = 278.15 \text{ K}$$

$$T_K = 255.15 \text{ K}$$

$$c * m = 80000 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$T(15 * 60\text{s}) = 260,75 \text{ K}$$

$$T(30 * 60\text{s}) = 265,05 \text{ K}$$

$$h * A = -\frac{c * m}{t} * \ln\left(\frac{T(t) - T_m}{T_0 - T_m}\right)$$

mit $T(15 * 60) = 260,75 \text{ K}$

$$h * A \approx 24,8021342 \frac{\text{J}}{\text{K} * \text{s}}$$

für die Wärmedurchgangsleistung gilt:

$$P = h * A * \Delta T$$

Dieser Leistung muss der Kühlschrank genau entgegenwirken, damit sich eine konstante Temperatur einstellt. Die gesuchte Leistung entspricht also dieser Leistung. Für einen Gefrierschrank im Raum gilt also:

$$\Delta T = T_L - T_K$$

Mit (für diesen Fall):

$$T_L = 279,65K$$

$$T_K = 255.15K$$

gilt:

$$\Delta T = 279,65K - 255.15K = 24,5K$$

Somit ist P:

$$P = h * A * \Delta T$$

$$h * A \approx 24,8021342 \frac{J}{K * s}$$

$$P_1 \approx 607,652W$$

Stellt man einen zweiten identischen Kühlschrank dazu gilt immer noch:

$$h * A \approx 24,8021342 \frac{J}{K * s}$$

was sich leicht zeigen lässt:

$$T(t) = (T_0 - T_m)e^{-\frac{h*2A}{c*2m}*t} + T_m = T(t) = (T_0 - T_m)e^{-\frac{h*A}{c*m}*t} + T_m$$

ΔT ist wenn man von einer Umgebungstemperatur von 8,209302 °C bei zwei Kühlschränken ausgeht:

$$\Delta T = 26,209302K$$

$$P = h * A * \Delta T$$

$$P_2 \approx 650,0466W$$

Also pro Kühlschrank 650,0466W. Insgesamt sind das ca. 1300,09W

Nr. 3c)

Als Vorüberlegung untersucht man, wie sich die Fläche des Kühlschranks gegenüber einer Volumenvergrößerung verhält. Dazu betrachtet man einen Längenfaktor β

$$V = \beta a * \beta b * \beta c$$

$$V = \beta^3 * a * b * c$$

$$A = \beta^2 2ab + \beta^2 2ac + \beta^2 2bc$$

$$A = \beta^2 (2ab + 2ac + 2bc)$$

$$V = \beta^3 * a * b * c$$

$$A = \beta^2 (2ab + 2ac + 2bc)$$

β^3 ist der Vergrößerungsfaktor γ des Volumens also:

$$\beta^3 = \gamma$$

$$A = \sqrt[3]{\gamma^2} (2 * a * b + 2 * b * c + 2 * a * c)$$

Also gilt: um den Faktor, um den sich das Volumen ändert, ändert sich die Fläche quadratisch zu der dritten Wurzel von diesem.

Also ist das Maß für die Stärke der Isolierung (j) in Abhängigkeit von dem Faktor um den der Kühlschrank vergrößert wird:

$$j(\gamma) = h_K * A_K * \sqrt[3]{\gamma^2}$$

oder in Abhängigkeit vom gewählten Volumen:

$$j(V) = h_K * A_K * \sqrt[3]{\left(\frac{V}{V_K}\right)^2}$$

Theoretisch könnte die Temperatur in Abhängigkeit vom Volumen beliebig groß sein, wenn man von einem perfekt isoliertem Haus ausgeht, einem Gefrierschrank der konstant -18°C hält und wie eine perfekte Wärmepumpe fungiert. Dies lässt sich mathematisch mit dem selben Ansatz wie in a zeigen:

$$m_K * c_K (T_K - T_m) = m_L * c_L (T_m - T_L)$$

Verdoppelt man das Volumen des Gefrierschranks verdoppelt sich auch die Masse also:

$$\gamma * m_K * c_K (T_K - T_m) = (m_L - \gamma * V_K * \rho_L) * c_L (T_m - T_L)$$

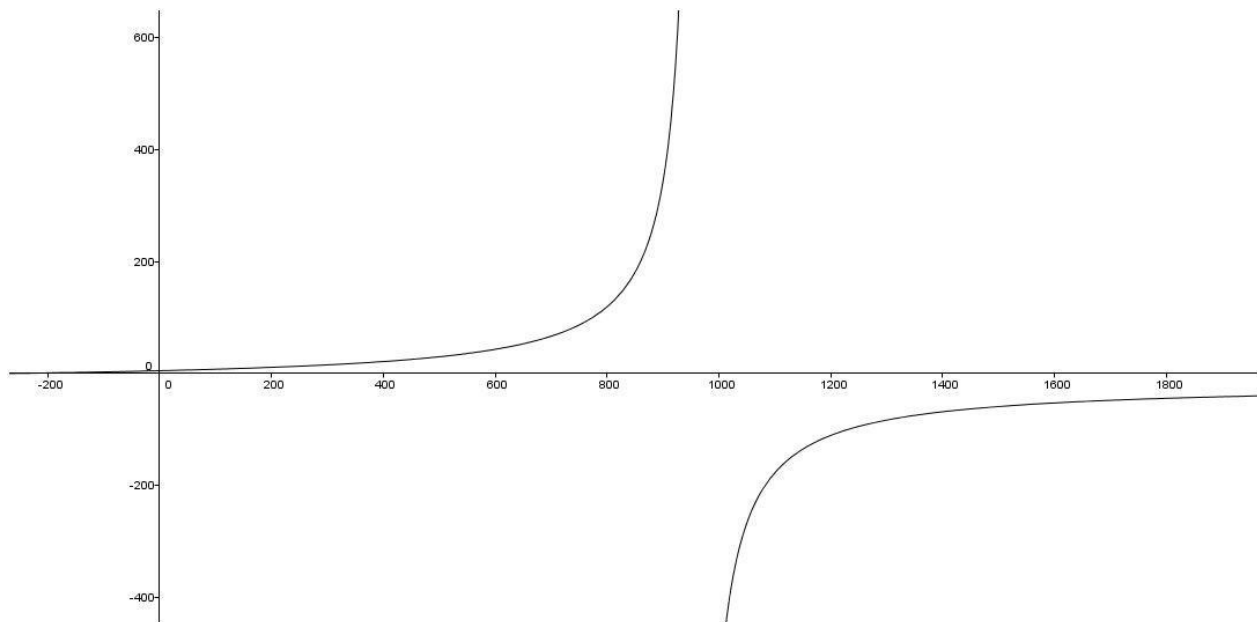
$$\frac{V}{V_K} = \gamma$$

$$\frac{V}{V_K} * m_K * c_K (T_K - T_m) = (m_L - V * \rho_L) * c_L (T_m - T_L)$$

Nach T_L umgestellt:

$$T_L(V) = T_m - \frac{\frac{V}{V_K} * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V * \rho_L) * c_L}$$

Geplottet in °C:



Folglich kann man versuchen von einem nicht perfekt isoliertem Haus auszugehen und kommt zu einem Ergebnis, wenn man die Erkenntnisse aus b bezüglich der Temperaturkurve ausnutzt:

Es galt:

$$T(t) = (T_R - T_m) e^{-\frac{h \cdot A}{c \cdot m} t} + T_m$$

Nun überlegt man sich, wie groß das Volumen des gesamten Raumes ist, und wie es sich von dem ursprünglichen Gefrierschrank unterscheidet:

$$V_{K1} \approx 961,0736 \text{ m}^3$$

$$V_{K2} \approx 62,67877 \text{ m}^3$$

$$V_R = V_{K1} + V_{K2} \approx 1023,7524 \text{ m}^3$$

$$\frac{V_R}{V_{K2}} \approx 16,3$$

Das Volumen des Raumes ist $16, \overline{3}$ mal größer als das der Gefriertruhe, also gilt für die Fläche schätzungsweise, wenn die selben Seitenverhältnisse bestehen:

$$A_R = \sqrt[3]{16, \overline{3}}^2 * A_K$$

Geht man von einer sehr guten Isolierung des Raumes wie der des Kühlschranks aus, gilt:

$$j_R = \sqrt[3]{16, \overline{3}}^2 * h_K * A_K$$

$$j_R \approx \sqrt[3]{16, \overline{3}}^2 * 24,8021 \frac{J}{K * s}$$

$$j_R \approx 159,6633 \frac{J}{K * s}$$

Mit:

$$T(t) = (T_R - T_m) e^{-\frac{h * A}{c * m} * t} + T_m$$

$$T(t) = (T_R - T_m) e^{-\frac{j_R}{c * m} * t} + T_m$$

$$T_L(V) = T_R = T_m - \frac{\frac{V}{V_K} * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V * \rho_L) * c_L}$$

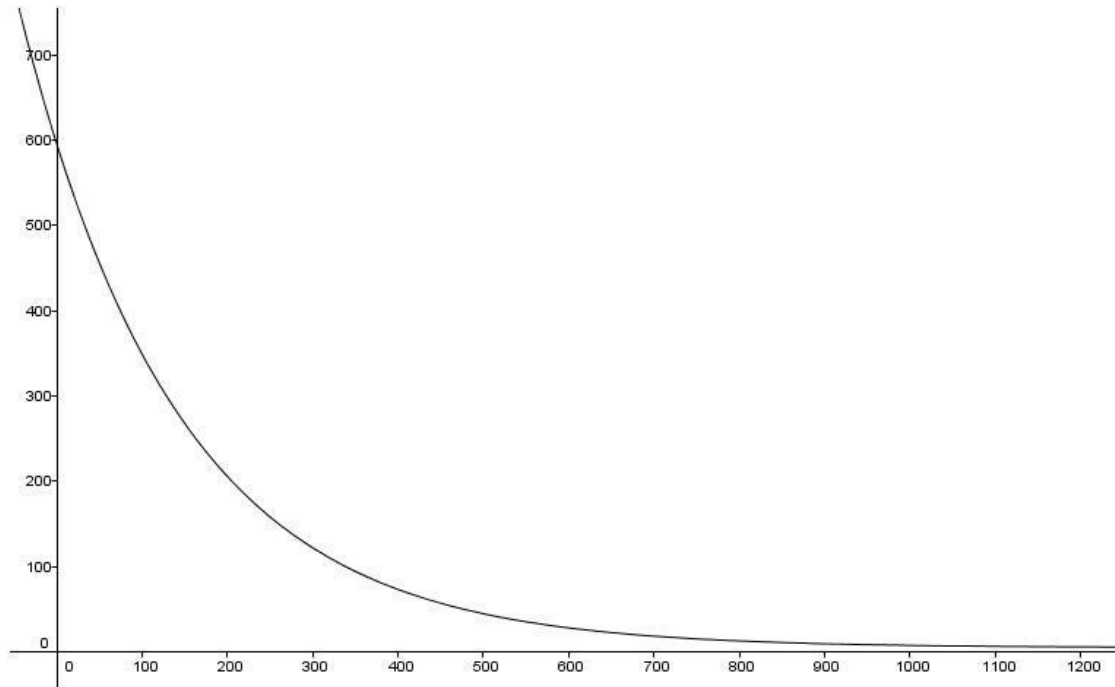
mit

$$T(t) = (T_R - T_m) e^{-\frac{h * A}{c * m} * t} + T_m$$

$$T_V(t) = \left(T_m - \frac{\frac{V}{V_K} * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V * \rho_L) * c_L} - T_m \right) e^{-\frac{j_R}{c_L * m_L} * t} + T_m$$

$$T_V(t) = -\frac{\frac{V}{V_K} * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V * \rho_L) * c_L} e^{-\frac{j_R}{c_L * m_L} * t} + T_m$$

Lässt man $t \rightarrow \infty$ wachsen, stellt sich also für alle Volumen des Kühlschranks in Wirklichkeit die Raumtemperatur von T_m also 5°C ein. Geht man als Beispiel von einem fast Raumfüllenden Gefrierschrank von 925m^3 aus, so würde sich in perfekt isoliertem Zustand eine Temperatur von ca. 600°C einstellen, wenn der Kühlschrank -18°C hält (vgl. oberen Graphen mit unterem). Bezieht man nun mit ein, dass die Hütte nicht perfekt isoliert ist ergibt sich nach der oberen Funktion folgende Abkühlungskurve in s und $^\circ\text{C}$ (in der Skizze ist $j_R \gg 159,6633$):



Will man dies nicht zulassen (also von perfekter Isolierung ausgehen) und will aber dennoch einen Schätzwert erzwingen, so kann man sich die Durchschnittstemperatur über dem Intervall von der Kühltankgröße bis zur Restraumgröße errechnen:

$$\frac{1}{V_{K1} - V_{K2}} * \int_{V_{K2}}^{V_{K1}} T_m - \frac{\frac{V}{V_K} * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V * \rho_L) * c_L} dV \approx 622,5K \approx 350^\circ C$$

Die Sinnhaftigkeit ist aber eindeutig zu bezweifeln, da nach dem Ergebnis mindestens 80% des Raumes ausgefüllt wären und die technische Realisierung aufgrund des immensen Leistungsverbrauches und Problemen mit dem Kondensator schwer möglich wäre.

Man kann sich also auch praktisch überlegen:

Eine Steckdose hat 230V und ist standardmäßig mit 16A abgesichert. Man überlegt sich also das Gegenteil von Aufgabenteil b:

$$P = 230V * 16A = 3680W$$

Mit

$$P = h * A * \Delta T$$

Und einem Wirkungsgrad von

$$\lambda \approx 0,8$$

$$\lambda * P = \sqrt[3]{\left(\frac{V}{V_K}\right)^2} * h_K * A_K * \Delta T$$

$$\lambda * P = \sqrt[3]{\left(\frac{V}{V_K}\right)^2} * h_K * A_K * (T_R - T_K)$$

(das Quadrat der kubischen Wurzel von $\frac{V}{V_K}$ entstammt den Vorüberlegungen(siehe Anfang der Teilaufgabe))

Mit

$$T_R = T_m - \frac{\frac{V}{V_K} * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V * \rho_L) * c_L}$$

Ergibt sich:

$$\lambda * P = \sqrt[3]{\left(\frac{V}{V_K}\right)^2} * h_K * A_K * \left(T_m - \frac{\frac{V}{V_K} * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V * \rho_L) * c_L} - T_K \right)$$

Nach V auflösen:

$$\lambda * P = \left(\sqrt[3]{\frac{V}{V_K}} \right)^2 * h_K * A_K * \left((T_m - T_K) - \frac{\frac{V}{V_K} * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V * \rho_L) * c_L} \right)$$

$$\lambda * P = \sqrt[3]{V^2} * \frac{h_K * A_K * (T_m - T_K)}{\sqrt[3]{V_K^2}} - \sqrt[3]{V^2} V * \frac{h_K * A_K * m_K * c_K (T_K - T_m)}{\sqrt[3]{V_K^2} V_K (m_L - V * \rho_L) * c_L}$$

$$0 = \frac{\sqrt[3]{V^2} * h_K * A_K * (T_m - T_K) * \sqrt[3]{V_K^2} V_K (m_L - V * \rho_L) * c_L}{\sqrt[3]{V_K^2} * \sqrt[3]{V_K^2} V_K (m_L - V * \rho_L) * c_L} - \frac{\sqrt[3]{V^2} V * h_K * A_K * m_K * c_K (T_K - T_m) * \sqrt[3]{V_K^2}}{\sqrt[3]{V_K^2} * \sqrt[3]{V_K^2} V_K (m_L - V * \rho_L) * c_L} - \frac{\lambda * P * \sqrt[3]{V_K^2} * \sqrt[3]{V_K^2} V_K (m_L - V * \rho_L) * c_L}{\sqrt[3]{V_K^2} * \sqrt[3]{V_K^2} V_K (m_L - V * \rho_L) * c_L}$$

$$0 = \frac{\sqrt[3]{V^2} * h_K * A_K * (T_m - T_K) * \sqrt[3]{V_K^2} V_K (m_L - V * \rho_L) * c_L - \sqrt[3]{V^2} V * h_K * A_K * m_K * c_K (T_K - T_m) * \sqrt[3]{V_K^2} - \lambda * P * \sqrt[3]{V_K^2} * \sqrt[3]{V_K^2} V_K (m_L - V * \rho_L) * c_L}{\sqrt[3]{V_K^2} * \sqrt[3]{V_K^2} V_K (m_L - V * \rho_L) * c_L}$$

$$0 = \sqrt[3]{V^2} * h_K * A_K * (T_m - T_K) * \sqrt[3]{V_K^2} V_K (m_L - V * \rho_L) * c_L - \sqrt[3]{V^2} V * h_K * A_K * m_K * c_K (T_K - T_m) * \sqrt[3]{V_K^2} - \lambda * P * \sqrt[3]{V_K^2} * \sqrt[3]{V_K^2} V_K (m_L - V * \rho_L) * c_L$$

Man muss also die Nullstellen der gegebenen Funktion berechnen und erhält numerisch(z.B. Newton Verfahren) :

$$V_{Kmax} \approx 361,815866m^3$$

mit

$$T_{Rmax} = T_m - \frac{\frac{V_{Kmax}}{V_K} * m_K * c_K (T_K - T_m)}{(m_L - V_{Kmax} * \rho_L) * c_L}$$

$$T_{Rmax} \approx 292,03677K = 18,88677^\circ C$$

Diesen Wert kann man als plausiblen Schätzwert verwenden, der gesucht war.

Bemerkung:

Moderne Gefrierschränke haben maximal einen Wirkungsgrad von 80%. Weitergehend könnte man sich einen Temperatur-Leistungs-Index als Maß für die Effizienz des Gefrierschranks als Heizung definieren (also $\beta = \frac{T}{P}$) und das Volumen so wählen, dass β maximal wird. Dieses Volumen wäre dann so gewählt, dass mit dem kleinsten Leistungsaufwand die größte Temperatur erreicht wird.

Aufgabe 4

Nr.4a

(Bilder zu den Versuchen im Anhang)

Das Volumen einer Halbkugel beträgt:

$$V = \frac{1}{2} * \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3$$

Leitet man nach R ab gilt:

$$A = \frac{dV}{dR} = 2\pi R^2$$

$$\Rightarrow dV = 2\pi R^2 * dR$$

Analog für die Oberfläche einer hohlen Halbkugel ohne Grundfläche:

$$A = 2\pi R^2$$

$$\frac{dA}{dR} = 4\pi R$$

$$\Rightarrow dA = 4\pi R * dR$$

Mit $\frac{dW}{2*dA} = \sigma$ (die Zwei, da es eine äußere Oberfläche und eine Innere Oberfläche gibt (gilt für sehr dünn angenommene Seifenhautdicken)):

$$dW = 2 * dA * \sigma = 2 * 4\pi R * dR * \sigma = 8 * \pi * \sigma * R * dR$$

Mit $\frac{dW}{dV} = \rho$

$$dW = \rho * dV = \rho * 2\pi R^2 * dR$$

$$\Rightarrow \rho * 2\pi R^2 * dR = 8 * \pi * \sigma * R * dR$$

$$\rho * R = 4 * \sigma$$

$$\rho = \frac{4 * \sigma}{R}$$

Mit $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi * r^4}{8 * \eta} * \frac{\rho}{l}$:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi * r^4}{8 * \eta} * \frac{4 * \sigma}{l * R} = \frac{\pi * r^4}{2 * \eta} * \frac{\sigma}{l * R}$$

$$dV = \frac{\pi * r^4}{2 * \eta} * \frac{\sigma}{l * R} * dt$$

Mit $dV = 2\pi R^2 * dR$ (siehe oben):

$$\frac{\pi * r^4}{2 * \eta} * \frac{\sigma}{l * R} * dt = 2\pi R^2 * dR$$

$$\frac{r^4}{4 * \eta} * \frac{\sigma}{l} * dt = R^3 * dR$$

$$\frac{r^4}{4 * \eta} * \frac{\sigma}{l} = R^3 * \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{r^4}{4 * \eta} * \frac{\sigma}{l} := k$$

$$k = R^3 * \frac{dR}{dt}$$

Ansatz:

$$R(t) = \sqrt[4]{a * t \pm c}$$

$$R'(t) = \frac{1}{4 * \sqrt[4]{(a * t \pm c)^3}} * a$$

$$k = \left(\sqrt[4]{a * t \pm c}\right)^3 * \frac{1}{4 * \sqrt[4]{(a * t \pm c)^3}} * a$$

$$k = (a * t \pm c)^{\frac{3}{4}} * \frac{1}{4 * (a * t \pm c)^{\frac{3}{4}}} * a$$

$$k = \frac{1}{4} * a$$

$$a = 4 * k$$

$$\Rightarrow R(t) = \sqrt[4]{4 * k * t \pm c}$$

Probe:

$$k = \left(\sqrt[4]{4 * k * t \pm c} \right)^3 * \frac{1}{4 * \sqrt[4]{(4 * k * t \pm c)^3}} * 4 * k$$

$$k = \frac{1}{4} * 4 * k \Rightarrow k = k$$

Und man fordert:

$$R(0) = R_0$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{\pm c} = R_0 \Rightarrow \pm c = R_0^4$$

$$R(t) = \sqrt[4]{4 * k * t \pm R_0^4}$$

Man schaut sich an wann $R(t)=0$ wird:

$$0 = \sqrt[4]{4 * k * t \pm R_0^4}$$

$$0 = 4 * k * t \pm R_0^4$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{R_0^4}{4 * k} = \frac{R_0^4}{4} * \frac{4 * \eta * l}{r^4 * \sigma} = \frac{R_0^4 * \eta * l}{r^4 * \sigma}$$

Daraus folgt:

$$t_0 \sim R_0^4$$

Was zu zeigen war

Also gilt für σ :

$$\sigma = \frac{R_0^4 * \eta * l}{r^4 * t_0}$$

Um σ experimentell zu bestimmen kann man nun, wenn die Viskosität gegeben ist, die Länge und den Radius des Strohhalmes, den Anfangsradius der Blase und die Zeit, bis keine Luft mehr in der Blase ist, messen.

Experimentell setzt man das ganze am besten um, indem man die Blase auf einer umgedrehten, von den Maßen her genormter (in diesem Fall $r=4,5\text{cm}$) und zuvor mit der Flüssigkeit benetzter Petrischale erzeugt, so dass die Blase mit Radius R_0 die gesamte Oberfläche der Petrischale einnimmt. So kann man den Anfangsradius mit bestmöglicher Präzision festlegen.

Die Werte, die verwendet wurden, waren:

$$R_0 = 0,045\text{m}$$

$$l = 0,211\text{m}$$

$$r = 0,0025\text{m}$$

Da die angegebene Mischung verwendet wurde, und die Temperatur bei 20°C lag, geht man von einer Viskosität von:

$$\eta = 18,2 * 10^{-6} \text{Pa} * \text{s} \text{ aus}$$

Die Zeit, die bis zur kompletten "Auflösung" gemessen wurde, war:

$$t_0 = 24,61\text{s}$$

Mit

$$\sigma = \frac{R_0^4 * \eta * l}{r^4 * t_0}$$

Ergibt sich:

$$\sigma \approx 0,01638 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Dieser Wert scheint von der Größenordnung her plausibel zu sein, da er um ein ca.4-5 mal geringer ist als der von Wasser, und das Spülmittel u.a die Funktion hat die Oberflächenspannung zu verringern.

Nr.4 b)

Die normale Kettenlinie lässt sich durch den Kosinus Hyperbolicus beschreiben. Modelliert wird unter der Voraussetzung, dass gemessen wird, wie weit der tiefste Punkt unter der Stange liegt (also c_1), und wie weit die Verbindungsenden voneinander auf der Stange entfernt sind (also d).

$$f(x) = a * \cosh(x) - b$$

Man fordert von der Funktion:

$$1. \quad 0 = a * \cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - b$$

$$2. \quad -c_1 = a * \cosh(0) - b$$

Wobei d der Abstand zwischen den Befestigungspunkten ist und c_1 der Abstand des tiefsten Punktes der Kettenlinie von der Stange.

Aus 2. folgt:

$$2. \quad -c_1 = a - b$$

$$a = b - c_1$$

In 1. eingesetzt:

$$0 = (b - c_1) * \cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - b$$

$$0 = b * \cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - c_1 * \cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - b$$

$$0 = b * \left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right) - c_1 * \cosh\left(\frac{1}{2}d\right)$$

$$\Rightarrow b = \frac{c_1 * \cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)}$$

$$\Rightarrow a = \frac{c_1 * \cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} - c_1 = c_1 \left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow f(x) = c_1 \left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} - 1 \right) * \cosh(x) - \frac{c_1 * \cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)}$$

$$f(x) = c_1 \left(\left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} - 1 \right) * \cosh(x) - \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} \right)$$

Nun wird eine Formel für die Fläche zwischen Stab und Kette hergeleitet, wenn keine Seifenhaut dazwischen liegt:

$$A = 2 * \left| \int_0^{\frac{1}{2}d} c_1 \left(\left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} - 1 \right) * \cosh(x) - \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} \right) dx \right|$$

$$A = 2 * c_1 \left| \left[\left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} - 1 \right) * \sinh(x) - \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} x \right]_0^{\frac{1}{2}d} \right|$$

$$A = 2 * c_1 \left| \left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} - 1 \right) * \sinh\left(\frac{1}{2}d\right) - \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} * \frac{1}{2}d \right|$$

$$A = 2 * c_1 \left| \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} \sinh\left(\frac{1}{2}d\right) - \sinh\left(\frac{1}{2}d\right) - \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} * \frac{1}{2}d \right|$$

$$A_1 = 2 * c_1 \left| \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} \left(\sinh\left(\frac{1}{2}d\right) - \frac{1}{2}d \right) - \sinh\left(\frac{1}{2}d\right) \right|$$

Da die Energiedifferenz benötigt wird, die zwischen beiden Kettenlinien (der normalen und der dreieckigen mit Seife) liegt, benötigt man eine Formel zur Berechnung der Höhe:

$$\Delta W = m * g * \Delta h$$

An Δh kommt man über die durchschnittliche Höhe der Funktionen:

$$h_1 = \frac{1}{\frac{1}{2}d - 0} * \int_0^{\frac{1}{2}d} c_1 \left(\left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} - 1 \right) * \cosh(x) - \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} \right) dx$$

$$h_1 = \frac{2}{d} * c_1 \left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} \left(\sinh\left(\frac{1}{2}d\right) - \frac{1}{2}d \right) - \sinh\left(\frac{1}{2}d\right) \right)$$

Dasselbe wird nun durchgeführt für die dreieckige Kettenlinie mit Seifenhaut:

Die Konstruktion der Funktion für die eine Hälfte des Dreiecks wird nun durchgeführt (c_2 : Abstand des Tiefpunktes von der Stange s : eingespannte Kettenlänge (theoretisch auch mit Bogenlänge über die obere cosh-Funktion lösbar → das Integral ist allerdings so kompliziert, dass man es für jeden Fall einzeln numerisch lösen müsste, oder einen Computer damit beauftragen müsste)):

$$g(x) = mx - c_2$$

Forderung:

$$0 = m \frac{1}{2}d - c_2$$

$$m = 2 \frac{c_2}{d}$$

$$\Rightarrow g(x) = 2 \frac{c_2}{d} x - c_2$$

Mit $c_2 = \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}d^2}$ (einfach aus dem Satz des Pythagoras gefolgert...)

$$g(x) = 2 \frac{\sqrt{\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}d^2}}{d} x - \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}d^2}$$

Berechnung der Durchschnittshöhe der Dreieckskettenlinie:

$$h_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}d - 0} * \int_0^{\frac{1}{2}d} 2 \frac{c_2}{d} x - c_2 dx$$

$$h_2 = \frac{2}{d} * \left[\frac{c_2}{d} x^2 - c_2 x \right]_0^{\frac{1}{2}d}$$

$$h_2 = \frac{2}{d} * \left[\frac{c_2}{d} \left(\frac{1}{2} d \right)^2 - c_2 \frac{1}{2} d \right]_0^{\frac{1}{2} d}$$

$$h_2 = \frac{2}{d} * \left(c_2 \left(\frac{1}{4} d \right) - c_2 \frac{1}{2} d \right)$$

$$h_2 = \frac{2}{d} * \left(-c_2 \left(\frac{1}{4} d \right) \right)$$

$$h_2 = -\frac{1}{2} c_2$$

$$h_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{4} d^2}$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{4} d^2} - \frac{2}{d} * c_1 \left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{2} d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2} d\right) - 1\right)} \left(\sinh\left(\frac{1}{2} d\right) - \frac{1}{2} d \right) - \sinh\left(\frac{1}{2} d\right) \right)$$

Mit $\Delta W = m * g * \Delta h$:

$$\Delta W = m * g * \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{4} d^2} - \frac{2}{d} * c_1 \left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{2} d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2} d\right) - 1\right)} \left(\sinh\left(\frac{1}{2} d\right) - \frac{1}{2} d \right) - \sinh\left(\frac{1}{2} d\right) \right) \right)$$

Bzw mit $m = s * \mu$ (μ :=Masse pro Strecke) (einfach mit dem Satz des Pythagoras)

$$\Delta W = s * \mu * g * \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{4} d^2} - \frac{2}{d} * c_1 \left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{2} d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2} d\right) - 1\right)} \left(\sinh\left(\frac{1}{2} d\right) - \frac{1}{2} d \right) - \sinh\left(\frac{1}{2} d\right) \right) \right)$$

s : Kettenlänge zwischen den Punkten

μ : Gesamtmasse der Kette durch Gesamtlänge

g : Fallbeschleunigung

c_1 : Abstand des tiefsten Punktes der normalen Kettenlinie von der Stange

d : Abstand der beiden Befestigungspunkte an der Stange

Nun wird die Flächendifferenz zwischen den Flächen, die die beiden Kettenlinien mit der Stange einschließen, benötigt.

Fläche der Dreieckskettenlinie:

$$A_2 = 2 * \frac{1}{2} * c_2 * \frac{1}{2} d = \frac{1}{2} d * \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{4} d^2}$$

Fläche der normalen Kettenlinie:

$$A_1 = 2 * c_1 \left| \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} \left(\sinh\left(\frac{1}{2}d\right) - \frac{1}{2}d \right) - \sinh\left(\frac{1}{2}d\right) \right|$$

ΔA aus der Differenz der Flächen multipliziert mit dem Faktor 2 da die Seifenhaut zwei Seiten hat.

$$\Delta A = 2(A_1 - A_2) = 4 * c_1 \left| \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} \left(\sinh\left(\frac{1}{2}d\right) - \frac{1}{2}d \right) - \sinh\left(\frac{1}{2}d\right) \right| - d * \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{4} d^2}$$

Mit $\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$:

$$\sigma = \frac{s * \mu * g * \left(c_1 + \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{4} d^2} * \left(\frac{1}{2} d - 1 \right) - \frac{2}{d} * \frac{c_1}{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)} * \sinh\left(\frac{1}{2}d\right) \right)}{2 * \left| c_1 \left(\frac{\sinh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)} - \frac{1}{2}d \right) - \frac{1}{2}d * \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{4} d^2} \right|} \text{ falsch}$$

$$\sigma = \frac{s * \mu * g * \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{4} d^2} - \frac{2}{d} * c_1 \left(\frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} \left(\sinh\left(\frac{1}{2}d\right) - \frac{1}{2}d \right) - \sinh\left(\frac{1}{2}d\right) \right) \right)}{4 * c_1 \left| \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\cosh\left(\frac{1}{2}d\right) - 1\right)} \left(\sinh\left(\frac{1}{2}d\right) - \frac{1}{2}d \right) - \sinh\left(\frac{1}{2}d\right) \right| - d * \sqrt{\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{4} d^2}}$$

Denn ΔW muss aufgebracht werden um die Fläche der Dreieckskettenlinie auf die Fläche der normalen Kettenlinie zu vergrößern.

Experimentell wurde eine Goldkette der Gesamtlänge von 0,502m und der Gesamtmasse von 0,0081kg verwendet.

Eine Konfiguration, bei der sich die beschriebene Dreiecksform ausbildete, hatte folgende Werte für s, c1, und d Der Messfehler war vergleichsweise hoch und Betrug 0,003m:

$$d = 0,175m$$

$$c_1 = 0,185m$$

$$s = 0,425m$$

Für μ ergibt sich:

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{0,0081kg}{0,502m} = \frac{81}{5020} \frac{kg}{m} \approx 0,016135 \frac{kg}{m}$$

σ müsste demnach:

$$\sigma \approx 0,192207 \frac{J}{m^2}$$

sein.

Die Plausibilität ist allerdings fraglich, denn auch wenn der Wert im Vergleich zu anderen Oberflächenspannungen nicht völlig aus dem Rahmen fällt (bei Quecksilber ist er sogar höher mit $0,476 \frac{J}{m^2}$), ist er ca. 2,5mal so hoch wie der bei Wasser ($0,7275 \frac{J}{m^2}$). In Wirklichkeit müsste der Wert aber aufgrund der Wirkung des Spülmittels kleiner als der von Wasser sein.

Nr.4 c

$$\sigma = \frac{dW}{dA}$$

Leitet man W und A nach der Länge l ab ergibt sich:

$$\frac{dW}{dl} = \frac{d}{dl} F * l = F$$

$$\Rightarrow dW = F * dl$$

$$\frac{dA}{dl} = \frac{d}{dl} l^2 = 2l$$

$$\Rightarrow dA = 2l * dl$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{F * dl}{2l * dl} = \frac{F}{2l}$$

Die Oberflächenspannung ist also eine Kraft pro Strecke.

Durch Ausnutzung eines Kräftegleichgewichtes lässt sich die Oberflächenspannung vermutlich sehr genau bestimmen. Zu diesem Zweck kann man die Flüssigkeit in einer Kapillare aufsteigen lassen und die Gewichtskraft, wenn sich die Flüssigkeit nicht weiter empor bewegt, mit der Kraft aus der Gleichung $\sigma = \frac{F}{2l}$ gleichsetzen und man kann σ berechnen. Die Dichte der Flüssigkeit wird benötigt um zusammen mit dem eingenommenem Volumen in der Kapillare und der Fallbeschleunigung die Gewichtskraft zu bestimmen.

Zunächst überlegt man, was statt $2l$ in der Gleichung stehen müsste:

Die Kraft, die nun wirkt, wirkt über die Länge der kreisrunden Berührungsstelle zwischen Flüssigkeit und der Kapillare:

Folglich ist die Länge $2l = 2\pi r$ also:

$$\sigma = \frac{F}{2\pi r}$$

$$F_K = \sigma * 2\pi r$$

Für die Gewichtskraft ergibt sich:

$$F_G = m * g = V * \rho * g = \pi r^2 * h * \rho * g$$

Es muss gelten:

$$F_K = F_G$$

also:

$$\sigma * 2\pi r = \pi r^2 * h * \rho * g$$

$$\sigma = \frac{1}{2} r * h * \rho * g$$

Benutzt man eine dünne Pipette als Kapillare, kommt man einfach durch die Volumeneinteilung an r. Zur Dichtebestimmung der Flüssigkeit wiegt man ein abgefülltes Volumen und teilt das gewogene durch das Volumen.

Durchführung:

Die Flüssigkeit wird Eine Pipette mit kleinem Radius r wird aufrecht in die Flüssigkeit, von der die Oberflächenspannung σ bestimmt werden soll gestellt. Anschließend erzeugt man einen Unterdruck an der offen zur Luft stehenden Seite(etwa durch saugen), so dass die Flüssigkeit auf eine gewisse Höhe aufsteigt. Im Anschluss hört man mit dieser Maßnahme auf und wartet bis der Flüssigkeitspegel aufgehört hat sich weiter abzusenken. Der Abstand zwischen Oberfläche der Flüssigkeit und Pegelstand ist die gesuchte Höhe h.

Führt man das Experiment mit der vorgegebenen Mischung bei 20°C durch, ergeben sich folgende Werte:

200ml sind ca. 210g schwer (rechnen), die Dichte ρ ist also ca. 1050 kg/m³

In h₀=12cm der Pipette passen V=0,11ml Flüssigkeit

Mit $r = \sqrt{\frac{V}{\pi * h_0}}$ ergibt sich $r \approx 0,54017 * 10^{-3}m$

Die Flüssigkeit steigt in der Pipette $1cm \pm 0,3mm$

Mit

$$\sigma = \frac{1}{2} r * h * \rho * g$$

ergibt sich ein Wert von:

$$\sigma \approx 0,02782 \frac{N}{m}$$

Das Ergebnis scheint plausibel zu sein, da der Literaturwert für Wasser mehr als doppelt so hoch ist und die Oberflächenspannung der Mischung erwartungsgemäß kleiner sein muss, da die Funktion von Spülmittel gerade die ist die Oberflächenspannung zu zerstören.

Nr.4 d)

Es wurden also insgesamt zwei plausible Werte und ein fragwürdiger Wert für die Oberflächenspannung ermittelt:

$$\sigma \approx 0,01638 \frac{N}{m}$$

$$\sigma \approx 0,02782 \frac{N}{m}$$

$$\sigma \approx 0,192207 \frac{N}{m}$$

Mögliche Fehlerquellen bei dem Experiment aus Aufgabe b könnten zum einen an ungenauen Messungen gelegen haben und damit in Verbindung stehend die große Anzahl an zu messenden unnormierten Größen. Gemessen wurde:

$$d = 0,175m$$

$$c_1 = 0,185m$$

$$s = 0,425m$$

$$m = 0,0072 \text{ kg}$$

$$l = 0,505m$$

Andererseits könnte es an der vorhergehenden theoretischen Modellierung gelegen haben, auch wenn es einleuchtend ist sich die Differenz der bestehenden Energieniveaus über die Durchschnittshöhe der beiden Kurven herzuleiten und anschließend ganz nach der Definition durch die doppelte Flächendifferenz, die die Kurveneinschließen zu teilen.

Eine Fehlermöglichkeit, die nicht zu unterschätzen ist, ist auch die Struktur der Kette selber. Denn führt man das Experiment durch, so bemerkt man bei Variation von d , dass die Kette ab einer bestimmten Position sprunghaft in die Dreiecksform wechselt und sich von der Form evtl. sogar etwas nach innen wölbt. Die Dreiecksform besteht bei weiteren Variationen augenscheinlich über einem bestimmten Intervall von ca. 1cm(geschätzt). d lässt sich in der Realität nicht eindeutig bestimmen. Eine Fehlerrechnung z.B. nach Taylor wäre allerdings von Hand bei der vorliegenden Formel sehr aufwändig.

Bei den anderen beiden Experimenten zeichnen sich plausible Werte ab, wobei die Zeit Messung und das Aufblasen der Blase von Hand bei Experiment 1 erhebliche Fehlerquellen verursacht. Durch die Methode

mit der Petrischale kann man zwar einen relativ genau normierten Radius festlegen, dennoch kann es passieren, dass man kaum merklich mehr Luft hineinbläst, so dass sich die Blase etwas über den Rand wölbt. Da es bei doppeltem Volumen 16 mal so lange dauert bis die Blase zusammengeschrumpft ist, wirken sich also auch schon kleine Ungenauigkeiten vom Radius groß aus.

Bei dem Pipettenversuch hingegen verursacht nur die Messung der Steighöhe größere Fehler, wenn man nur eine vergleichsweise dicke Pipette zur Verfügung hat. Der Radius lässt sich sehr genau über das Zylindervolumen bestimmen und die Dichte beliebig genau über das Wiegen eines bestimmten Volumens.

Von der Art der Bestimmung unterscheiden sich die Experimente folgendermaßen:

Bei Exp1 wurde die Oberflächenspannung über eine Zeit bestimmt.

Bei Exp2 wurde die direkt über die angegebene Definition bestimmt.

Bei Exp3 wurde sie über ein Kräftegleichgewicht also einer Kraft bestimmt.(mechanische Definition)

